Distribuição e vendas
Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, 110 Sala 109 - Jardim Botânico
22460-320 Rio de Janeiro RJ
Telefones: (21) 2529-5073 / 2529-5095
http://www.sbm.org.br / email:lojavirtual@sbm.org.br

ISBN 978-85-83370-94-9

MUNIZ NETO, Antonio Caminha.

Tópicos de Matemática Elementar: combinatória / Caminha Muniz Neto.
-2.ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2016.
v.4 ; 272p. (Coleção Professor de Matemática; 27)

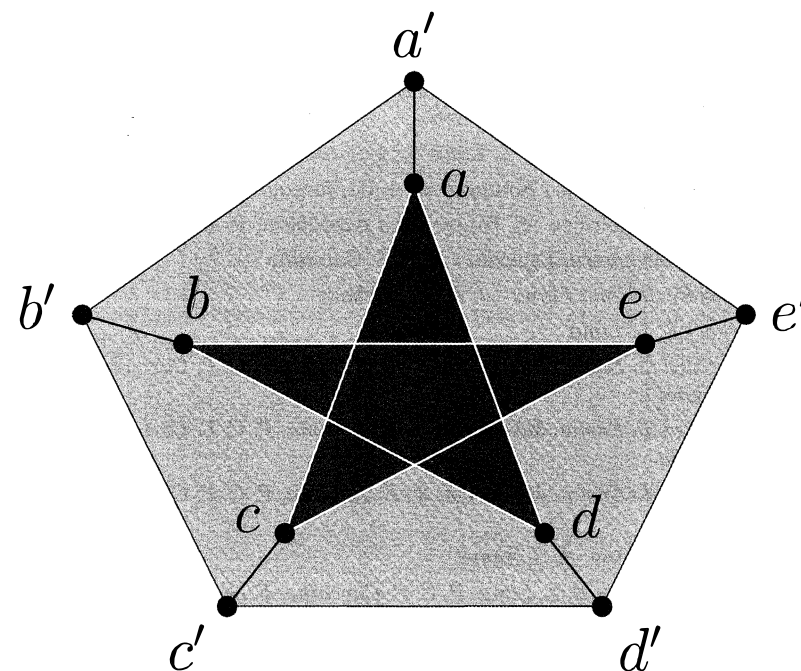
ISBN 978-85-83370- 94- 9

1. Técnicas Elementares de Contagem. 2. Funções Geradoras. 3. Introducão à Teoria dos Grafos. I. Título.

Tópicos de Matemática Elementar

Volume 4

Combinatória

Antonio Caminha Muniz Neto

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}, \forall n \geq 1.$$

2ª edição
2016
Rio de Janeiro

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Logaritmos - E. L. Lima
Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios - A. C. Morgado, J. B. Pitombeira, P. C. P. Carvalho e P. Fernandez
Medida e Forma em Geometria (Comprimento, Área, Volume e Semelhança) - E. L. Lima
Meu Professor de Matemática e outras Histórias - E. L. Lima
Coordenadas no Plano com as soluções dos exercícios - E. L. Lima com a colaboração de P. C. P. Carvalho
Trigonometria, Números Complexos - M. P. do Carmo, A. C. Morgado e E. Wagner, Notas Históricas de J. B. Pitombeira
Coordenadas no Espaço - E. L. Lima
Progressões e Matemática Financeira - A. C. Morgado, E. Wagner e S. C. Zani
Construções Geométricas - E. Wagner com a colaboração de J. P. Q. Carneiro
Introdução à Geometria Espacial - P. C. P. Carvalho
Geometria Euclidiana Plana - J. L. M. Barbosa
Isometrias - E. L. Lima
A Matemática do Ensino Médio Vol. 1 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
A Matemática do Ensino Médio Vol. 2 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
A Matemática do Ensino Médio Vol. 3 - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
Matemática e Ensino - E. L. Lima
Temas e Problemas - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
Episódios da História Antiga da Matemática - A. Aaboe
Exame de Textos: Análise de livros de Matemática - E. L. Lima
A Matemática do Ensino Medio Vol. 4 - Exercicios e Soluções - E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado
Construções Geométricas: Exercícios e Soluções - S. Lima Netto
Um Convite à Matemática - D.C de Morais Filho
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 1 - Números Reais - A. Caminha
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 2 - Geometria Euclidiana Plana - A. Caminha
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 3 - Introdução à Análise - A. Caminha
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 4 - Combinatória - A. Caminha
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 5 - Teoria dos Números - A. Caminha
Tópicos de Matemática Elementar - Volume 6 - Polinômios - A. Caminha

A meus filhos Gabriel e Isabela,
na esperança de que um dia leiam este livro.

Sumário

Prefácio

Esta coleção evoluiu a partir de sessões de treinamento para olimpíadas de Matemática, por mim ministradas para alunos e professores do Ensino Médio, várias vezes ao longo dos anos de 1992 a 2003 e, mais recentemente, como orientador do Programa de Iniciação Científica para os premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Projeto Amílcar Cabral de cooperação educacional entre Brasil e Cabo Verde.

Idealmente, planejei o texto como uma mistura entre uma iniciação suave e essencialmente autocontida ao fascinante mundo das competições de Matemática, além de uma bibliografia auxiliar aos estudantes e professores do secundário interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos. Resumidamente, seu propósito primordial é apresentar ao leitor uma abordagem de quase todos os conteúdos geralmente constantes dos currículos do secundário, e que seja ao mesmo tempo concisa, não excessivamente tersa, logicamente estruturada e mais aprofundada que a usual.

Na estruturação dos livros, me ative à máxima do eminente matemático húngaro-americano George Pólya, que dizia não se poder fazer

Matemática sem *sujar as mãos*. Assim sendo, em vários pontos deixei a cargo do leitor a tarefa de verificar aspectos não centrais aos desenvolvimentos principais, quer na forma de detalhes omitidos em demonstrações, quer na de extensões secundárias da teoria. Nestes casos, frequentemente referi o leitor a problemas específicos, os quais se encontram marcados com * e cuja análise e solução considero parte integrante e essencial do texto. Colecionei ainda, em cada seção, outros tantos problemas, cuidadosamente escolhidos na direção de exercitar os resultados principais elencados ao longo da discussão, bem como estendê-los. Uns poucos destes problemas são quase imediatos, ao passo que a maioria, para os quais via de regra oferto sugestões precisas, é razoavelmente difícil; no entanto, insto veementemente o leitor a debruçar-se sobre o maior número possível deles por tempo suficiente para, ainda que não os resolva todos, passar a apreciá-los como corpo de conhecimento adquirido.

O primeiro volume discorre sobre vários aspectos relevantes do conjunto dos números reais e de álgebra elementar, no intuito de munir o leitor dos requisitos necessários ao estudo dos tópicos constantes dos volumes subsequentes. Após começar com uma discussão não axiomática das propriedades mais elementares dos números reais, são abordados, em seguida, produtos notáveis, equações e sistemas de equações, sequências elementares, indução matemática e números binomiais; o texto finda com a discussão de várias desigualdades algébricas importantes, notadamente aquela entre as médias aritmética e geométrica, bem como as desigualdades de Cauchy, de Chebychev e de Abel.

Dedicamos o segundo volume a uma iniciação do leitor à geometria Euclidiana plana, inicialmente de forma não axiomática e enfatizando construções geométricas elementares. Entretanto, à medida em que o texto evolui, o método sintético de Euclides – e, consequentemente, demonstrações – ganha importância, principalmente com a discussão dos conceitos de congruência e semelhança de triângulos; a partir desse ponto, vários belos teoremas clássicos da geometria, usualmente ausentes dos livros-texto do secundário, fazem sua aparição. Numa terceira etapa, o texto apresenta outros métodos elementares usuais no estudo da geometria, quais sejam, o método analítico de R. Descartes, a trigonometria e o uso de vetores; por sua vez, tais métodos são utilizados tanto para reobter resultados anteriores de outra(s) maneira(s) quanto para deduzir novos resultados.

De posse do traquejo algébrico construído no volume inicial e do aparato geométrico do volume dois, discorremos no volume três sobre aspectos elementares de funções e certos excertos de cálculo diferencial e integral e análise matemática, os quais se fazem necessários em certos pontos dos três volumes restantes. Prescindindo, inicialmente, das noções básicas do Cálculo, elaboramos, dentre outros, as noções de gráfico, monotonicidade e extremos de funções, bem como examinamos o problema da determinação de funções definidas implicitamente por relações algébricas. Na continuação, o conceito de função contínua é apresentado, primeiramente de forma intuitiva e, em seguida, axiomática, sendo demonstrados os principais resultados pertinentes. Em especial, utilizamos este conceito para estudar a convexidade de gráficos – culminando com a demonstração da desigualdade de J. Jensen – e o problema da definição rigorosa da área sob o gráfico de uma função contínua e positiva – que, por sua vez, possibilita a apresentação de uma construção adequada das funções logaritmo natural e exponencial. O volume três termina com uma discussão das propriedades mais elementares de derivadas e do teorema fundamental do cálculo, os quais são mais uma vez aplicados ao estudo de desigualdades, em especial da desigualdade entre as médias de potências.

O volume quatro é devotado à análise combinatória. Começamos revisando as técnicas mais elementares de contagem, enfatizando as construções de bijeções e argumentos recursivos como estratégias básicas. Na continuação, apresentamos um apanhado de métodos de contagem um tanto mais sofisticados, como o princípio da inclusão exclusão e os métodos de contagem dupla, do número de classes de

equivalência e mediante o emprego de métricas em conjuntos finitos. A cena é então ocupada por funções geradoras, onde a teoria elementar de séries de potências nos permite discutir de outra maneira problemas antigos e introduzir problemas novos, antes inacessíveis. Terminada nossa excursão pelo mundo da contagem, enveredamos pelo estudo do problema da existência de uma configuração especial no universo das configurações possíveis, utilizando para tanto o princípio das gavetas de G. L. Dirichlet – vulgo "princípio das casas dos pombos" –, um célebre teorema de R. Dilworth e a procura e análise de invariantes associados a problemas algorítmicos. A última estrutura combinatória que discutimos é a de um grafo, quando apresentamos os conceitos básicos usuais da teoria com vistas à discussão de três teoremas clássicos importantes: a caracterização da existência de caminhos Eulerianos, o teorema de A. Cayley sobre o número de árvores rotuladas e o teorema extremal de P. Turán sobre a existência de subgrafos completos em um grafo.

Passamos em seguida, no quinto volume, à discussão dos conceitos e resultados mais elementares de teoria dos números, ressaltando-se inicialmente a teoria básica do máximo divisor comum e o teorema fundamental da aritmética. Discutimos também o método da descida de P. de Fermat como ferramenta para provar a inexistência de soluções inteiras para certas equações diofantinas, e resolvemos também a famosa equação de J. Pell. Em seguida, preparamos o terreno para a discussão do famoso teorema de Euler sobre congruências, construindo a igualmente famosa função de Euler com o auxílio da teoria mais geral de funções aritméticas multiplicativas. A partir daí, o livro apresenta formalmente o conceito de congruência de números em relação a um certo módulo, discutindo extensivamente os resultados usualmente constantes dos cursos introdutórios sobre o assunto, incluindo raízes primitivas, resíduos quadráticos e o teorema de Fermat de caracterização dos inteiros que podem ser escritos como soma de dois quadrados. O grande diferencial aqui, do nosso ponto de vista, é o calibre dos exemplos discutidos e dos problemas propostos ao longo do texto, boa parte dos quais oriundos de variadas competições ao redor do mundo.

Finalmente, números complexos e polinômios são os objetos de estudo do sexto e último volume da coleção. Para além da teoria correspondente usualmente estudada no secundário – como a noção de grau, o algoritmo da divisão e o conceito de raízes de polinômios –, vários são os tópicos não padrão abordados aqui. Dentre outros, destacamos inicialmente a utilização de números complexos e polinômios como ferramentas de contagem e a apresentação quase completa de uma das mais simples demonstrações do teorema fundamental da álgebra. A seguir, estudamos o famoso teorema de I. Newton sobre polinômios simétricos e as igualmente famosas desigualdades de Newton, as quais estendem a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica. O próximo tema concerne os aspectos básicos da teoria de interpolação de polinômios, quando dispensamos especial atenção aos polinômios interpoladores de J. L. Lagrange. Estes, por sua vez, são utilizados para resolver sistemas lineares de Vandermonde sem o recurso à álgebra linear, os quais, a seu turno, possibilitam o estudo de uma classe particular de sequências recorrentes lineares. O livro termina com o estudo das propriedades de fatoração de polinômios com coeficientes inteiros, racionais ou pertencentes ao conjunto das classes de congruência relativas a algum módulo primo, seguido do estudo do conceito de número algébrico. Há, aqui, dois pontos culminantes: por um lado, uma prova mais simples do fechamento do conjunto dos números algébricos em relação às operações aritméticas básicas; por outro, o emprego de polinômios ciclotômicos para provar um caso particular do teorema de Dirichlet sobre primos em progressões aritméticas.

Várias pessoas contribuíram ao longo dos anos, direta ou indiretamente, para que um punhado de anotações em cadernos pudesse transformar-se nesta coleção de livros. Os ex-professores do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Marcondes

Cavalcante França, João Marques Pereira, Guilherme Lincoln Aguiar Ellery e Raimundo Thompson Gonçalves, ao criarem a Olimpíada Cearense de Matemática na década de 1980, motivaram centenas de jovens cearenses, dentre os quais eu me encontrava, a estudarem mais Matemática. Meu ex-professor do Colégio Militar de Fortaleza, Antônio Valdenísio Bezerra, ao convidar-me, inicialmente para assistir a suas aulas de treinamento para a Olimpíada Cearense de Matemática e posteriormente para dar aulas consigo, iniciou-me no maravilhoso mundo das competições de Matemática e influenciou definitivamente minha escolha profissional. Os comentários de muitos de vários de ex-alunos contribuíram muito para o formato final de boa parte do material aqui colecionado; nesse sentido, agradeço especialmente a João Luiz de Alencar Araripe Falcão, Roney Rodger Sales de Castro, Marcelo Mendes de Oliveira, Marcondes Cavalcante França Jr., Marcelo Cruz de Souza, Eduardo Cabral Balreira, Breno de Alencar Araripe Falcão, Fabrício Siqueira Benevides, Rui Facundo Vigelis, Daniel Pinheiro Sobreira, Antônia Taline de Souza Mendonça, Carlos Augusto David Ribeiro, Samuel Barbosa Feitosa, Davi Máximo Alexandrino Nogueira e Yuri Gomes Lima. Vários de meus colegas professores teceram comentários pertinentes, os quais foram incorporados ao texto de uma ou outra maneira; agradeço, em especial, a Fláudio José Gonçalves, Francisco José da Silva Jr., Onofre Campos da Silva Farias, Emanuel Augusto de Souza Carneiro, Marcelo Mendes de Oliveira, Samuel Barbosa Feitosa e Francisco Bruno de Lima Holanda. Os professores João Lucas Barbosa e Hélio Barros deram-me a conclusão de parte destas notas como alvo a perseguir ao me convidarem a participar do Projeto Amílcar Cabral de treinamento dos professores de Matemática da República do Cabo Verde. Meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, Abdênago Alves de Barros, José Othon Dantas Lopes, José Robério Rogério e Fernanda Esther Camillo Camargo, bem como meu orientando de iniciação científica Itamar Sales de Oliveira Filho, leram partes do texto final e ofereceram várias sugestões. Os pareceristas indicados pela SBM opinaram decisivamente para que os livros certamente resultassem melhores que a versão inicial por mim submetida. O presidente da SBM, professor Hilário Alencar da Silva, o antigo editor-chefe da SBM, professor Roberto Imbuzeiro de Oliveira, bem como o novo editor-chefe, professor Abramo Hefez, foram sempre extremamente solícitos e atenciosos comigo ao longo de todo o processo de edição. Por fim, quaisquer erros ou incongruências que ainda se façam presentes, ou omissões na lista acima, são de minha inteira responsabilidade.

Por fim e principalmente, gostaria de agradecer a meus pais, Antonio Caminha Muniz Filho e Rosemary Carvalho Caminha Muniz, e à minha esposa Mônica Valesca Mota Caminha Muniz. Meus pais me fizeram compreender a importância do conhecimento desde a mais tenra idade, sem nunca terem medido esforços para que eu e meus irmãos desfrutássemos o melhor ensino disponível; minha esposa brindou-me com a harmonia e o incentivo necessários à manutenção de meu ânimo e humor, em longos meses de trabalho solitário nas madrugadas. Esta coleção de livros também é dedicada a eles.

FORTALEZA, JANEIRO de 2012

Antonio Caminha M. Neto

Prefácio à 2ª edição

Para a segunda edição, fiz uma extensa revisão no texto, corrigindo várias imprecisões de língua portuguesa e de Matemática. Adicionei também alguns problemas novos, no intuito de melhor exercitar certos pontos da teoria, os quais não se encontravam adequadamente contemplados pelos problemas propostos à primeira edição. Adicionei, ainda, uma nova seção (agora a seção 4.1), e colecionei as sugestões e soluções aos problemas propostos em um capítulo separado (o capítulo 6); adicionalmente, apresentei sugestões ou soluções a todos os problemas com algum grau apreciável de dificuldade.

Por fim, gostaria de aproveitar o ensejo para agradecer à comunidade matemática brasileira, em geral, e a todos os leitores que me enviaram sugestões ou correções, em particular, o excelente acolhimento desfrutado pela primeira edição desta obra.

FORTALEZA, JUNHO de 2016

Antonio Caminha M. Neto

CAPÍTULO 1

Técnicas Elementares de Contagem

Neste capítulo inicial, desenvolvemos várias técnicas elementares para calcular a quantidade de configurações correspondentes a uma certa situação combinatória, sem a necessidade de listá-las uma a uma. Como o leitor verá, as ferramentas essenciais para tal fim são a construção de bijeções apropriadas e a utilização de argumentos recursivos.

1.1 O princípio bijetivo

Em tudo o que segue, admitimos que o leitor tenha relativa familiaridade com conjuntos e operações elementares sobre os mesmos. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por I_n o conjunto

$$I_n = \{j \in \mathbb{N};\ 1 \leq j \leq n\}$$

dos números naturais de 1 a n.

Um conjunto A é **finito** se $A = \emptyset$ ou se existe uma bijeção $f : I_n \to A$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Se $A \neq \emptyset$ é finito e $f : I_n \to A$ é uma bijeção, então, denotando $a_j = f(j)$, escrevemos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e dizemos que n é o **número de elementos** de A (para a boa definição da noção de número de elementos, veja o problema 1). Ainda nesse caso, denotamos

$$|A| = n \quad \text{ou} \quad \#A = n$$

para significar que A tem n elementos. Por completude, dizemos que $\emptyset$ tem 0 elementos, e denotamos $|\emptyset| = 0$.

A teoria elementar de contagem se baseia na seguinte proposição, conhecida como o **princípio bijetivo**.

Proposição 1.1. *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A| = |B|$ se, e só se, existe uma bijeção $f : A \to B$.*

Prova. Suponha, inicialmente, que exista uma bijeção $f : A \to B$. Se $|A| = n$, tome uma bijeção $g : I_n \to A$; então $f \circ g : I_n \to B$ também é bijeção, de modo que $|B| = n$.

Reciprocamente, suponha que $|A| = |B| = n$, com bijeções $g : I_n \to A$ e $h : I_n \to B$. Então $h \circ g^{-1} : A \to B$ é uma bijeção de A em B. □

A consequência a seguir do princípio bijetivo é conhecida como o **princípio aditivo** da contagem. Para o enunciado da mesma, lembre-se de que dois conjuntos A e B são ditos **disjuntos** se $A \cap B = \emptyset$.

Proposição 1.2. *Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Prova. Exercício (veja o problema 2). □

Uma aplicação típica da proposição anterior consiste na escolha de exatamente um objeto dentre dois tipos distintos possíveis, havendo um certo número de possibilidades para cada tipo (no enunciado

acima, os *tipos* correpondem aos conjuntos disjuntos A e B, ao passo que as possibilidades para cada tipo correspondem aos elementos de A e de B).

Uma fácil indução permite generalizar facilmente o princípio aditivo para n conjuntos finitos e dois a dois disjuntos, conforme o corolário a seguir.

Corolário 1.3. *Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos e dois a dois disjuntos, então*

$$\# \bigcup_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} |A_j|.$$

Prova. Exercício (veja o problema 3). □

Para o que segue, dados conjuntos A e B, denotamos por $A \setminus B$ o conjunto

$$A \setminus B = \{x \in A; x \notin B\}$$

e dizemos que $A \setminus B$ é a **diferença** entre A e B, nessa ordem. Se $B \subset A$, por vezes referimo-nos a $A \setminus B$ como o **complementar** de B em A, também denotando-o por B^c, sempre que não houver perigo de confusão.

Como consequência adicional do princípio aditivo, temos a seguinte fórmula simples para o número de elementos do complementar de um subconjunto de um conjunto finito.

Corolário 1.4. *Se A é um conjunto finito e $B \subset A$, então*

$$|B| = |A| - |A \setminus B|.$$

Prova. Como $A = B \cup (A \setminus B)$, uma união disjunta, temos pelo princípio aditivo que

$$|A| = |B \cup (A \setminus B)| = |B| + |A \setminus B|.$$

□

A filosofia geral de aplicação do corolário anterior em problemas de contagem é a seguinte: suponha que queiramos contar o número de elementos de um certo conjunto B, mas não saibamos fazê-lo diretamente; uma estratégia interessante é procurar um conjunto $A \supset B$ tal que saibamos contar $|A|$ e $|A \setminus B|$; em seguida, aplicamos o corolário para obter a quantidade de elementos de B. Veremos exemplos concretos dessa situação mais adiante.

Nosso próximo resultado generaliza a proposição 1.1 e o corolário 1.4, calculando o número de elementos da união de dois conjuntos finitos. A fórmula (1.1) a seguir é conhecida como o **princípio da inclusão-exclusão** para dois conjuntos finitos e será generalizada na seção 2.1 (cf. teorema 2.1).

Proposição 1.5. *Se A e B são conjuntos finitos, então*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1.1}$$

Prova. Como A e $B \setminus A$ são conjuntos finitos, disjuntos e tais que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, segue do princípio aditivo que

$$|A \cup B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|.$$

Por outro lado, temos também a união disjunta

$$B = (B \setminus A) \cup (A \cap B),$$

de maneira que, novamente pelo princípio aditivo, $|B| = |B \setminus A| + |A \cap B|$. Então, $|B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$, relação que substituída na expressão para $|A \cup B|$ fornece

$$|A \cup B| = |A| + (|B| - |A \cap B|).$$

□

Para o que segue, lembre-se de que, dados conjuntos A e B, seu **produto cartesiano** é o conjunto $A \times B$, formado por todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$, i.e.,

$$A \times B = \{(a, b);\ a \in A, b \in B\}.$$

Lembre-se de que, se $(a, b), (c, d) \in A \times B$, então $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$ (a esse respeito, veja o também problema 5).

A proposição a seguir e seu corolário são conhecidos como o **princípio multiplicativo** ou, ainda, o **princípio fundamental da contagem**.

Proposição 1.6. *Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Prova. Se $B = \{y_1, \ldots, y_m\} = \bigcup_{j=1}^m \{y_j\}$, segue do problema 6 que

$$A \times B = A \times \left(\bigcup_{j=1}^m \{y_j\} \right) = \bigcup_{j=1}^m (A \times \{y_j\}),$$

uma união disjunta. Portanto, pelo corolário 1.3, temos

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{j=1}^m (A \times \{y_j\}) \right| = \sum_{j=1}^m |A \times \{y_j\}|. \tag{1.2}$$

Agora, como a função $f : A \to A \times \{y_j\}$ dada por $f(x) = (x, y_j)$ é uma bijeção (com inversa $g : A \times \{y_j\} \to A$ dada por $g(x, y_j) = x$), temos $|A| = |A \times \{y_j\}|$ para $1 \leq j \leq m$. Portanto, segue de (1.2) que

$$|A \times B| = \sum_{j=1}^m |A| = |A| \cdot m = |A| \cdot |B|.$$

□

Em aplicações, a versão anterior do princípio fundamental da contagem se presta à escolha simultânea de dois objetos, um de cada um de dois tipos distintos, com possivelmente mais de uma possibilidade para cada tipo (no enunciado da proposição, os *tipos* correspondem aos conjuntos A e B e as possibilidades para cada tipo correspondem aos elementos de A e de B).

Exemplo 1.7. *Quantos são os números naturais de dois algarismos distintos, não nulos e ambos menores ou iguais a* 5*? Quantos são tais que o algarismo das dezenas é menor que o algarismo das unidades?*

Solução. Para efeito da contagem pedida, o problema equivale a colocar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e contar quantos são os pares ordenados $(a, b) \in A \times A$ tais que $a \neq b$ e, depois, tais que $a < b$.

Comecemos contando quantos são os pares $(a, b) \in A \times A$, sem nenhuma restrição adicional. Como isso é o mesmo que contar o número de elementos de $A \times A$, o princípio multiplicativo dá $5 \times 5 = 25$ possíveis pares (a, b). Para contar quantos deles são tais que $a \neq b$, usaremos o corolário 1.4: o número de tais pares é obtido descontando, do número total de pares, aqueles nos quais $a = b$. Como há 5 pares (a, a), com $a \in A$, concluímos que há $25 - 5 = 20$ pares (a, b) tais que $a \neq b$.

Para o que falta, note que (a, b) é um par ordenado tal que $a < b$ se, e só se, (b, a) é um par ordenado tal que $b > a$; de outro modo, a correspondência $(a, b) \mapsto (b, a)$ é uma bijeção entre o conjunto formado pelos pares ordenados $(a, b) \in A \times A$ tais que $a < b$ e aquele formado pelos pares (a', b') tais que $a' > b'$. Portanto, tais conjuntos têm um mesmo número elementos (i.e., de pares ordenados); como eles são disjuntos e sua união é igual ao conjunto dos pares (a, b) tais que $a \neq b$, segue da proposição 1.2 que o número pedido de pares é $\frac{20}{2} = 10$. □

Para a discussão subsequente, precisamos estender o conceito de produto cartesiano a um número finito qualquer de conjuntos finitos

e não vazios. Para tanto, dados conjuntos finitos e não vazios A_1, A_2, $\ldots$, A_n, definimos seu produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ como o conjunto das sequências (às quais também denominaremos **n−uplas**) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tais que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_n \in A_n$[1].

Corolário 1.8. *Se* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *são conjuntos finitos e não vazios, então*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{j=1}^{n} |A_j|.$$

Prova. Exercício (veja o problema 7). □

O corolário a seguir traz uma importante elaboração do princípio multiplicativo.

Corolário 1.9. *Se* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *são conjuntos finitos e não vazios, com* $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, $\ldots$, $|A_k| = n_k$, *então há exatamente* $n_1 n_2 \ldots n_k$ *sequências* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, *com* $a_j \in A_j$ *para* $1 \leq j \leq k$.

Prova. Como dito anteriormente, uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ tal que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $\ldots$, $a_k \in A_k$ é um elemento do produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$. Portanto, o número de tais sequências é igual ao número de elementos de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$, que por sua vez é igual, pelo corolário anterior, a $|A_1||A_2| \ldots |A_k| = n_1 n_2 \ldots n_k$. □

[1] De posse dessa definição temos, em princípio, duas definições distintas para os elementos de $A \times B$: por um lado, eles consistem dos pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$; por outro, consistem das sequências (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. Uma vez que o par ordenado (a, b) é definido por $(a, b) = \{a, \{a, b\}\}$ (cf. problema 5) e a sequência (a, b) (com $a \in A$ e $b \in B$) é definida como uma função $f : \{1, 2\} \to A \cup B$ tal que $f(1) := a \in A$ e $f(2) := b \in B$, concluímos que, apesar de utilizarmos notações iguais, eles são objetos matemáticos distintos. Contudo, para nossos propósitos, a identificação do par ordenado (a, b) com a sequência (a, b) é totalmente inofensiva e será feita, doravante, sem maiores comentários.

Em palavras, o corolário acima fornece uma maneira de contar de quantas maneiras distintas podemos escolher, *ordenada* e *independentemente*, k objetos, sendo um deles do tipo 1, outro do tipo 2, ..., outro do tipo k e havendo uma ou mais possibilidades de escolha para cada tipo de objeto (novamente aqui, os tipos de objetos correspondem aos conjuntos $A_1, \ldots, A_k$, ao passo que as possibilidades para cada tipo correspondem aos elementos dos conjuntos em questão).

Como caso especial da situação do corolário 1.9, podemos contar de quantas maneiras é possível escolher ordenadamente k elementos de um conjunto com n elementos, sendo permitidas escolhas repetidas. Mais precisamente, temos o corolário a seguir.

Corolário 1.10. *Se $|A| = n$, então há exatamente n^k sequências de tamanho k e cujos termos são elementos de A.*

Prova. Faça $A_1 = \cdots = A_k = A$ no corolário 1.9. □

De outro modo, dizemos que o corolário acima conta quantos são os **arranjos com repetição** de k objetos, escolhidos de um conjunto com n objetos.

Uma outra maneira útil de encararmos o resultado do corolário anterior é lembrando que uma sequência de k termos, todos pertencentes a I_n, é simplesmente uma função $f : I_k \to I_n$. Portanto, o que estabelecemos acima foi que o número de funções distintas $f : I_k \to I_n$ é exatamente n^k. Mais adiante, calcularemos quantas dessas funções são injetivas e quantas são sobrejetivas.

Problemas – Seção 1.1

1. * Prove que a noção de número de elementos de um conjunto finito é um conceito bem definido. Mais precisamente, prove que existe uma bijeção $f : I_m \to I_n$ se, e só se, $m = n$.

2. * Prove o princípio aditivo a partir da definição para o número de elementos de um conjunto finito. Mais precisamente, prove que se A e B forem conjuntos disjuntos e não vazios, com $|A| = m$ e $|B| = n$, então existe uma bijeção $f : I_{m+n} \to A \cup B$.

3. * Prove o corolário 1.3.

4. * Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios, com $|A| = |B|$. Prove que uma função $f : A \to B$ é injetiva se, e só se, é sobrejetiva.

5. * Dados conjuntos A e B e elementos $a \in A$, $b \in B$, definimos formalmente o **par ordenado** (a, b) como[2]
$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$
Se $a, c \in A$ e $b, d \in B$, use tal definição para provar que $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$.

6. * Dados conjuntos não vazios A, B_1, ..., B_n, prove que
$$A \times \left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} (A \times B_j).$$
Ademais, se B_1, ..., B_n forem dois a dois disjuntos, prove que os conjuntos da união do segundo membro acima também são dois a dois disjuntos.

7. * Prove o corolário 1.8.

Para o próximo problema, dado um conjunto A, definimos uma **partição** (ordenada) de A como uma sequência $(A_1, \ldots, A_k)$ de

[2]Uma tal definição é devida a Kazimierz Kuratowski, matemático polonês do século XX.

subconjuntos de A satisfazendo as seguintes condições: (i) $A = A_1 \cup \ldots \cup A_k$; (ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos $1 \le i, j \le k$, com $i \neq j$. Nesse caso, dizemos simplesmente que $A_1, \ldots, A_k$ (nessa ordem) formam uma *partição (ordenada) de A em k subconjuntos.*

8. Sejam dados $n, k \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito A, com n elementos. Mostre que há exatamente k^n partições do conjunto A em k subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$.

9. No plano cartesiano, um peão se move de acordo com a seguinte regra: estando no ponto (a, b), ele pode mover-se para um dos quatro pontos $(a+1, b+1)$, $(a+1, b-1)$, $(a-1, b+1)$ ou $(a-1, b-1)$. Se o peão parte do ponto $(0,0)$, quantas posições distintas ele poderá ocupar após seus n primeiros movimentos?

10. Dados $k, n \in \mathbb{N}$, faça os seguintes itens:

    (a) Para $1 \le j \le n$, prove que há exatamente $(n-j+1)^k$ sequências formadas por k elementos de I_n (possivelmente com repetições), tais que o menor termo da sequência é maior ou igual a j.

    (b) Para $1 \le j \le n$, prove que há exatamente $(n-j+1)^k - (n-j)^k$ sequências formadas por k elementos de I_n (possivelmente com repetições), tais que o menor termo da sequência é igual a j.

    (c) Prove que a soma dos termos mínimos de todas as n^k sequências de k elementos do conjunto I_n (possivelmente com repetições) é igual a $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

11. (França.) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$. Encontre, com justificativa, o maior número de elementos que um subconjunto X do conjunto A pode ter, satisfazendo a seguinte condição: se $x \in X$, então $2x \notin X$.

1.2 Mais bijeções

De posse dos resultados elementares estabelecidos na seção anterior, elaboramos mais a fundo, nesta seção, a utilização do princípio bijetivo para estabelecer a igualdade entre os números de elementos de dois conjuntos finitos.

Comecemos calculando, de duas maneiras distintas, o número de subconjuntos de um conjunto finito. Se A é um conjunto qualquer, denotamos por $\mathcal{P}(A)$ o **conjunto das partes** de A, i.e., a *família*[3]

$$\mathcal{P}(A) = \{B;\ B \subset A\}.$$

Dados conjuntos A e B com n elementos cada, uma bijeção $f : A \to B$ induz naturalmente uma bijeção $\tilde{f} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, definida para $C \subset A$ por

$$\tilde{f}(C) = \{f(x);\ x \in C\}.$$

Em palavras, dado um subconjunto C de A, definimos $\tilde{f}(C)$ como o subconjunto de B formado pelas imagens dos elementos de C pela função f. Observe que, em particular, temos

$$\tilde{f}(\emptyset) = \{f(x);\ x \in \emptyset\} = \emptyset,$$

uma vez que é impossível escolher $x \in \emptyset$.

Portanto, como corolário do princípio bijetivo, se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então

$$|A| = |B| \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|. \tag{1.3}$$

Precisamos também de outro conceito, que será útil em discussões futuras.

[3]Em Teoria dos Conjuntos, uma **família** é um conjunto cujos elementos também são conjuntos.

Definição 1.11. *Seja A um conjunto não vazio. Para $B \subset A$, a* **função característica** *de B (em A) é a função $\chi_B : A \to \{0,1\}$, definida por*

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \notin B \\ 1, & se\ x \in B \end{cases}. \tag{1.4}$$

Por exemplo, se $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ e $B = \{c,f,g\}$, então χ_B é a função de A em $\{0,1\}$ tal que

$$\chi_B(a) = \chi_B(b) = \chi_B(d) = \chi_B(e) = 0 \ \text{ e } \ \chi_B(c) = \chi_B(f) = \chi_B(g) = 1.$$

Para o que segue, se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ é um conjunto de n elementos, podemos, sempre que conveniente, associar a A a sequência $(a_1, \ldots, a_n)$; ao fazê-lo diremos que $(a_1, \ldots, a_n)$ é uma **ordenação** do conjunto A ou, por vezes, a **ordenação natural** de A.

Se A é como no parágrafo anterior e $B \subset A$, uma maneira combinatorialmente mais interessante de olhar a função característica χ_B de B em relação a A é considerá-la como uma sequência de zeros e uns, com as posições dos uns (em relação à ordenação natural de A) correspondendo aos elementos de B. Para exemplificar, sejam $A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$, munido com a ordenação induzida a partir da **ordem lexicográfica** (i.e., *alfabética*); se $B = \{c,f,g\}$, então a função característica de B (ou, por abuso de nomenclatura, o próprio conjunto B) corresponde à sequência $(0,0,1,0,0,1,1)$.

Mais geralmente, se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, munido com sua ordenação natural, e $B \subset A$, a **sequência característica** de B em A é a sequência $s_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, tal que

$$\alpha_j = \begin{cases} 0, & \text{se } a_j \notin B \\ 1, & \text{se } a_j \in B \end{cases}. \tag{1.5}$$

Podemos, por fim, calcular o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos.

Teorema 1.12. *Um conjunto com n elementos tem exatamente 2^n subconjuntos.*

Prova. Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos, munido de sua ordenação natural, e S o conjunto das sequências de n termos, formadas pelos elementos do conjunto $\{0,1\}$. Pelo corolário 1.10, temos $|S| = 2^n$. Para mostrarmos que $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$, basta mostrarmos que a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & S \\ & B & \longmapsto & s_B \end{array}$$

(i.e., a função que associa a cada subconjunto de A sua sequência característica em relação a A) é uma bijeção. Para tanto, verifique que a função $g : S \to \mathcal{P}(A)$, dada por

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \{a_j \in A;\ \alpha_j = 1\},$$

é a inversa de f. □

É interessante notar que podemos dar outra prova do teorema anterior recorrendo ao princípio bijetivo de maneira mais direta. De fato, por (1.3), basta mostrarmos que o conjunto $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ possui exatamente 2^n subconjuntos. Para tanto, basta definirmos uma bijeção

$$f : \mathcal{P}(A) \to \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\},$$

o que fazemos pondo $f(\emptyset) = 0$ e, para $\emptyset \neq B = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset A$, com $0 \le a_1 < \cdots < a_k \le n-1$,

$$f(B) = 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k}.$$

Uma vez que

$$1 \le 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k} \le 2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1,$$

a função f está bem definida. Para concluir que se trata de uma bijeção, lembre-se de que mostramos, no exemplo 5.12 de [11], que todo

inteiro $1 \leq m \leq 2^n - 1$ pode ser escrito, de modo único, como uma soma de potências de 2 distintas (obviamente, nenhuma delas pode ser maior que 2^{n-1}), sendo tal maneira de escrever m denominada sua *representação binária.* Assim, a unicidade da representação binária equivale á injetividade da função f, ao passo que a existência de uma tal representação equivale á sobrejetividade de f.

Observe como a prova acima ressalta a força do princípio bijetivo em contagem. Vejamos mais dois exemplos nesse sentido.

Exemplo 1.13. *Seja n um natural da forma $4k + 1$ ou $4k + 2$, para algum inteiro não negativo k. Prove que o conjunto I_n contém exatamente 2^{n-1} subconjuntos com soma dos elementos igual a um número par (e com a convenção de que a soma dos elementos do conjunto vazio é igual a 0).*

Prova. Sejam $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$ as famílias dos subconjuntos de I_n com soma de elementos respectivamente par e ímpar. Como $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$ são disjuntas e tais que $\mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(A)$, segue do princípio aditivo e do teorema 1.12 que

$$|\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| = |\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Assim, se mostrarmos que $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$, teremos $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1| = 2^{n-1}$.

Para o que falta, vamos construir uma bijeção entre $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$. Para tanto, considere a função

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(A) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \\ & B & \longmapsto & B^c \end{array},$$

onde $B^c = A \setminus B$ denota o *complementar* de B em A. Uma vez que $(B^c)^c = A \setminus (A \setminus B) = B$, temos $f(f(B)) = B$, para todo $B \subset A$; portanto, $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(A)}$, de sorte que f é uma bijeção. Agora, a ideia é mostrar que, se $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$, então a bijeção f induz uma bijeção entre $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$.

Dado $B \subset A$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B} x + \sum_{x \in B^C} x &= \sum_{x \in A} x = \sum_{x=1}^{n} x = \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (4k+1)(2k+1) \text{ ou } (2k+1)(4k+3), \end{aligned}$$

conforme seja $n = 4k + 1$ ou $n = 4k + 2$. Em qualquer caso,

$$\sum_{x \in B} x + \sum_{x \in B^C} x$$

é um número ímpar, de sorte que as somas dos elementos de B e de B^c têm paridades distintas; de outro modo,

$$B \in \mathcal{F}_0 \Leftrightarrow B^c \in \mathcal{F}_1.$$

Logo, a restrição g de f a $\mathcal{F}_0$ aplica $\mathcal{F}_0$ em $\mathcal{F}_1$, ao passo que a restrição h de f a $\mathcal{F}_1$ aplica $\mathcal{F}_1$ em $\mathcal{F}_0$. Mas, como g e h são claramente inversas uma da outra (pois $f = f^{-1}$), segue que g e h são bijeções e, daí, $|\mathcal{F}_0| = |\mathcal{F}_1|$. $\square$

O princípio bijetivo é particularmente útil na obtenção de propriedades do conjunto das *partições* de um natural n. Aqui e em tudo o que segue, uma **partição** de n é uma maneira de escrever n como soma de (uma ou mais) parcelas naturais, não necessariamente distintas. Por exemplo, as partições distintas de 4 são

$$4 = 1 + 3 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 = 2 + 2.$$

O resultado do exemplo a seguir é devido a L. Euler.

Exemplo 1.14 (Euler). *Prove que o número de partições de um natural n em parcelas ímpares é igual ao número de partições de n em parcelas distintas.*

Prova. Sendo $\mathcal{I}_n$ o conjunto das partições de n em parcelas ímpares e $\mathcal{D}_n$ o conjunto das partições de n em parcelas distintas, basta exibirmos uma bijeção $f : \mathcal{I}_n \to \mathcal{D}_n$. Para ver como definir f, consideremos a seguinte partição do número 51 em parcelas ímpares:

$$1+1+3+3+3+3+3+3+5+5+7+7+7.$$

Então,

$$\begin{aligned} 51 &= 2\cdot 1 + 6\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 7 \\ &= 2^1\cdot 1 + (2^2+2^1)\cdot 3 + 2^1\cdot 5 + (2^1+2^0)\cdot 7 \\ &= 2^1\cdot 1 + 2^2\cdot 3 + 2^1\cdot 3 + 2^1\cdot 5 + 2^1\cdot 7 + 2^0\cdot 7 \\ &= 2+12+6+10+14+7, \end{aligned}$$

uma partição de 51 em parcelas distintas. No que segue, vamos imitar o procedimento acima para construir a bijeção f que procuramos.

Uma partição $P \in \mathcal{I}_n$ é uma soma do tipo

$$n = \underbrace{1+\cdots+1}_{a_1} + \underbrace{3+\cdots+3}_{a_3} + \underbrace{5+\cdots+5}_{a_5} + \underbrace{7+\cdots+7}_{a_7} + \cdots,$$

onde, a partir de um certo k, o número de parcelas iguais a $2k+1$ é igual a 0. Então, temos

$$n = a_1\cdot 1 + a_3\cdot 3 + a_5\cdot 5 + a_7\cdot 7 + \cdots.$$

Para obter a partição procurada $f(P)$ de n em parcelas distintas, substitua cada coeficiente a_{2k+1} positivo por sua representação binária (cf. exemplo 5.12 de [11]); se 2^l for uma das parcelas assim obtidas, então $2^l(2k+1)$ será uma das parcelas de $f(P)$. Dessa maneira, afirmamos que obtemos uma partição de n em parcelas distintas. De fato, duas parcelas quaisquer são do tipo

$$2^{l_1}(2k_1+1) \quad \text{e} \quad 2^{l_2}(2k_2+1);$$

se $k_1 \neq k_2$, então tais parcelas já são diferentes; se $k_1 = k_2$, então deve ser $l_1 \neq l_2$, uma vez que obtivemos 2^{l_1} e 2^{l_2} como duas parcelas da representação binária de $a_{2k_1+1} = a_{2k_2+1}$. Portanto, f está bem definida.

Para ver que f é bijeção, definamos uma função $g : \mathcal{D}_n \to \mathcal{I}_n$ (que será a inversa de f) do seguinte modo: seja Q a partição

$$\begin{aligned} n = {} & (m_{11}+m_{12}+\cdots+m_{1t_1}) + (m_{31}+m_{32}+\cdots+m_{3t_3}) \\ & + (m_{51}+m_{52}+\cdots+m_{5t_5}) + \cdots \end{aligned}$$

de n em parcelas distintas, onde agrupamos entre parênteses as parcelas com mesma parte ímpar, (i.e., cada um dos números $m_{2k+1,i}$ é da forma $m_{2k+1,i} = 2^{l_i}(2k+1)$, para algum inteiro não negativo l_i). Então,

$$\begin{aligned} m_{2k+1,1}+\cdots+m_{2k+1,t_k} &= 2^{l_1}(2k+1)+\cdots+2^{l_{t_k}}(2k+1) \\ &= (2^{l_1}+\cdots+2^{l_{t_k}})(2k+1), \end{aligned}$$

de modo que, fazendo $2^{l_1}+\cdots+2^{l_{t_k}} = a_{2k+1}$, obtemos

$$n = a_1\cdot 1 + a_3\cdot 3 + a_5\cdot 5 + a_7\cdot 7 + \cdots$$

Definindo $g(Q)$ como a partição

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{a_1} + \underbrace{3+\cdots+3}_{a_3} + \underbrace{5+\cdots+5}_{a_5} + \underbrace{7+\cdots+7}_{a_7} + \cdots,$$

temos $g(Q) \in \mathcal{I}_n$ e é imediato verificar que f e g são inversas uma da outra. □

Problemas – Seção 1.2

1. Calcule o número de subconjuntos do conjunto I_n que contêm n.

2. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos naturais de n algarismos, $n > 1$, cuja soma dos algarismos é um número par. Prove que $|P| = \frac{9}{2} \cdot 10^{n-1}$.

3. Calcule a quantidade de números naturais n, de dez algarismos e satisfazendo as seguintes condições:

   (a) o último algarismo de n não é igual a 0.

   (b) n é divisível por 3.

4. * (APMO.) São dados $n \in \mathbb{N}$ e um conjunto finito e não vazio A. Mostre que há exatamente $(2^n-1)^{|A|}$ sequências $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, formadas por subconjuntos de A tais que $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

5. (União Soviética.) São dadas n retas no plano em *posição geral*, i.e., tais que não há duas paralelas nem três passando por um mesmo ponto. Calcule o número de regiões em que o plano fica dividido por tais retas.

Para o problema a seguir, dizemos que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I_n é um **sistema intersectante** se, para todos $A, B \in \mathcal{F}$, tivermos $A \cap B \neq \emptyset$.

6. (Bulgária - adaptado.) Seja $\mathcal{F}$ uma família intersectante de I_n.

   (a) Dê exemplo de uma tal $\mathcal{F}$ com exatamente 2^{n-1} conjuntos.

   (b) Prove que $|\mathcal{F}| \leq 2^{n-1}$.

7. * Para $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{I}_n$ a família dos subconjuntos de I_n com números ímpares de elementos. Se $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\} \in \mathcal{I}_n$, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k+1}$, dizemos que x_{k+1} é o *elemento central* de A, e denotamos $x_{k+1} = c(A)$. A esse respeito, faça os seguintes itens:

   (a) Para $1 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k+1} \leq n$, mostre que a aplicação

   $$\{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\} \mapsto \{n+1-x_{2k+1}, \ldots, n+1-x_2, n+1-x_1\}$$

   estabelece uma bijeção entre os conjuntos em $\mathcal{I}_n$ que têm elementos centrais respectivamente iguais a i e $n+1-i$.

   (b) Mostraremos no problema 5, página 27, que $|\mathcal{I}_n| = 2^{n-1}$. Use o item (a), juntamente com esse resultado, para mostrar que

   $$\sum_{A \in \mathcal{I}_n} c(A) = (n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

8. (Torneio das Cidades.) Para $n \in \mathbb{N}$, definimos a *diversidade* de uma partição de n como o número de parcelas distintas da partição. Se $p(n)$ é o número de partições de n e $q(n)$ é a soma das diversidades de todas as $p(n)$ partições possíveis, prove que:

   (a) $q(n) = 1 + p(1) + p(2) + \cdots + p(n-1)$.

   (b) $q(n) \leq \sqrt{2n}p(n)$.

1.3 Recursão

A filosofia geral da técnica de *contagem recursiva* ou *por recursão* é a seguinte: queremos contar o número a_n de elementos de um conjunto A_n, declarado mediante alguma regra específica em função do natural n; utilizando a declaração do conjunto A_n, obtemos uma **relação de recorrência** para a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, i.e., uma relação do tipo

$$a_n = F(a_1, \ldots, a_{n-1}, n), \tag{1.6}$$

para alguma função de n variáveis F; finalmente, a partir de tal relação de recorrência, usamos argumentos algébricos ou analíticos para explicitar a_n em função de n.

A fim de ilustrar a implementação das duas etapas acima, colecionamos, a seguir, alguns exemplos simples de contagem recursiva, a começar pela contagem recursiva do número de subconjuntos de um conjunto finito.

Exemplo 1.15. *Se A é um conjunto com n elementos, então A tem exatamente 2^n subconjuntos.*

Prova. Seja a_n o número de subconjuntos de A. Fixado $x \in A$, há dois tipos de subconjuntos de A: os que contém x e os que não o contém.

Se B é um subconjunto de A contendo x, então $B \setminus \{x\}$ é um subconjunto de $A \setminus \{x\}$; reciprocamente, se B' é um subconjunto de $A \setminus \{x\}$, então $B' \cup \{x\}$ é um subconjunto de A contendo x. Como tais correspondências são claramente inversas uma da outra, concluímos que há tantos subconjuntos de A contendo x quantos forem os subconjuntos de $A \setminus \{x\}$; mas, como $|A \setminus \{x\}| = n - 1$, segue que há a_{n-1} de tais subconjuntos de A. Por outro lado, como os subconjuntos de A que não contém x são exatamente os subconjuntos de $A \setminus \{x\}$, temos a_{n-1} desses subconjuntos.

Contabilizando os dois tipos acima de subconjuntos de A, concluímos que $a_n = 2a_{n-1}$, para todo $n > 1$. Mas, obviamente, $a_1 = 2$, de sorte que a fórmula para o termo geral de uma PG nos dá

$$a_n = a_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

□

Exemplo 1.16 (União Soviética). *Em um plano, são dadas n retas em posição geral, i.e., tais que não há duas paralelas nem três passando por um mesmo ponto. Calcule o número de regiões em que o plano fica dividido por tais retas.*

Solução. Suponha que, ao traçarmos no plano k retas em posição geral, o mesmo fica dividido em a_k regiões. Tracemos mais uma reta, r digamos, de tal sorte que as $k+1$ retas resultantes também estejam em posição geral. Como r intersecta as k retas anteriores em k pontos distintos, concluímos que r fica dividida em $k+1$ intervalos por esses k pontos. Cada um desses $k+1$ intervalos em que r fica dividida corresponde a exatamente uma região que r atravessa, dentre as a_k regiões que já tínhamos. Ao atravessar uma tal região, r a extingue, dividindo-a em duas novas regiões; portanto, r extingue $k+1$ regiões e gera $2(k+1)$ regiões. Assim, se a_{k+1} denota o número total de regiões após traçarmos a reta r, concluímos que

$$a_{k+1} = a_k - (k+1) + 2(k+1) = a_k + (k+1).$$

Por fim, uma vez que $a_1 = 2$, segue da fórmula (4.14) de [11] que

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} k = 1 + \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir é, provavelmente, a mais célebre dentre as aplicações elementares de argumentos recursivos, sendo conhecido como o **problema de Fibonacci**.

Exemplo 1.17. *Suponha que um casal de coelhos está apto a gerar descendentes quando completa dois meses de vida, gerando, então, um novo casal de coelhos a cada mês. Se tivermos inicialmente, em um ambiente isolado, um casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais teremos após 12 meses?*

Solução. Denote por F_n a quantidade de casais de coelhos após n meses, de maneira que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$ (o primeiro casal de descendentes só nasce no início do terceiro mês). Consideremos agora a

Figura 1.1: Leonardo de Pisa, também conhecido como Fibonacci, matemático italiano do século XI. Afora suas contribuições originais, como por exemplo o problema que ora tratamos, um dos principais méritos de Fibonacci foi fazer reviver na Europa a Matemática da antiguidade; em particular, Fibonacci introduziu na civilização ocidental o sistema de numeração e os algarismos indo-arábicos em sua famosa obra *Liber Abaci*.

quantidade F_{k+2} de casais existentes após $k+2$ meses. Há duas possibilidades para um tal casal: ou ele já existia após $k+1$ meses, ou ele nasceu no $(k+2)-$ésimo mês. O primeiro caso corresponde, por definição, a um total de F_{k+1} casais. No segundo caso, o casal de coelhos sob consideração descende de um dos casais que já existiam após k meses; reciprocamente, cada um dos casais que já existiam após k meses gera um casal de descendentes que será contabilizado após o $(k+2)-$ésimo mês, o que nos dá mais F_k casais de coelhos após $k+2$ meses. Portanto, as quantidades de casais após k, $k+1$ e $k+2$ meses relacionam-se pela igualdade

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k,$$

para todo $k \geq 1$. Logo,

$$F_3 = F_2 + F_1 = 2, \quad F_4 = F_3 + F_2 = 3, \ldots, \quad F_{12} = 144.$$

□

Nas notações do exemplo anterior, recordamos que a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ é conhecida como a **sequência de Fibonacci**.

Exemplo 1.18. *Utilizando as letras A, B e C, pede-se calcular quantas* palavras *de dez letras podemos formar, com ou sem significado, de modo que não haja duas consoantes consecutivas.*

Solução. Para $n \geq 1$, seja a_n o número de palavras de n letras satisfazendo as condições do enunciado. Para $k \geq 3$, uma palavra de k letras pode terminar em A, B ou C. Se terminar em A, as $k-1$ letras anteriores podem formar qualquer uma das a_{k-1} palavras de $k-1$ letras satisfazendo as condições do enunciado; se terminar em B ou C, a penúltima letra deve necessariamente ser A (uma vez que não podemos ter duas consoantes consecutivas) e as $k-2$ letras iniciais podem formar qualquer uma das a_{k-2} palavras de $k-2$ letras satisfazendo as condições do enunciado.

O argumento do parágrafo anterior nos fornece a relação de recorrência

$$a_k = a_{k-1} + 2a_{k-2}, \ \forall \ k \geq 3.$$

Como $a_1 = 3$ e $a_2 = 5$ (as possíveis *palavras* de duas letras são AA, AB, AC, BA ou CA), temos sucessivamente $a_3 = 11$, $a_4 = 21$, $a_5 = 43$, $a_6 = 85$, $a_7 = 171$, $a_8 = 341$, $a_9 = 683$ e $a_{10} = 1365$. □

Conforme sugerido pelos dois últimos exemplos acima, vários são os problemas combinatórios de caráter recursivo que, quando modelados algebricamente, transformam-se no problema de calcular, em função de n, o $n-$ésimo termo de uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$, que satisfaz uma certa relação de recorrência.

Vimos, no capítulo 4 de [11], como explicitar a_n em função de n, quando a recorrência satisfeita pela sequência é linear, de primeira, segunda ou terceira ordem. O próximo exemplo, devido ao professor

Emanuel Carneiro, traz uma situação combinatória que gerará uma recorrência linear de terceira ordem; antes da leitura do mesmo, recomendamos ao leitor rever o material da seção 4.3 de [11].

Exemplo 1.19. *Para cada conjunto $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de números reais, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$, defina*

$$\Delta(A) = \sum_{k \leq j \leq m} x_j - \sum_{1 \leq j < k} x_j,$$

onde $k = \frac{m+1}{2}$. Para $n > 1$ inteiro, mostre que

$$\sum_{\emptyset \neq A \subset I_n} \Delta(A) = (n^2 + n + 2) \cdot 2^{n-3}.$$

Solução. Para $n \geq 1$, seja $d_n = \sum_{\emptyset \neq A \subset I_n} \Delta(A)$. Examinando alguns casos particulares obtemos facilmente $d_1 = 1$, $d_2 = 4$ e $d_3 = 14$. Em geral, temos

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= \sum_{\emptyset \neq A \subset I_{n+1}} \Delta(A) \\ &= \sum_{\substack{A \subset I_{n+1} \\ n+1 \in A}} \Delta(A) + \sum_{\emptyset \neq A \subset I_n} \Delta(A) \\ &= \sum_{\substack{A \subset I_{n+1} \\ n+1 \in A}} \Delta(A) + d_n. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Para analisar o último somatório acima, seja $A' = A \setminus \{n+1\} \subset I_n$, para cada $A \subset I_{n+1}$ tal que $n+1 \in A$. Sendo $\mathcal{P}_n$ e $\mathcal{I}_n$ as famílias dos subconjuntos de I_n com quantidades pares e ímpares de elementos, respectivamente, temos

$$\sum_{\substack{A \subset I_{n+1} \\ n+1 \in A}} \Delta(A) = \sum_{A' \in \mathcal{P}_n} \Delta(A' \cup \{n+1\}) + \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A' \cup \{n+1\}). \tag{1.8}$$

Mostraremos no problema 5 (veja também o problema 7, página 40) que $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{I}_n| = 2^{n-1}$. Isto posto, consideremos separadamente os dois somatórios do segundo membro de (1.8):

(a) se $A' \in \mathcal{P}_n$, segue facilmente da definição de $\Delta(\cdot)$ que

$$\Delta(A' \cup \{n+1\}) = (n+1) + \Delta(A'),$$

onde $\Delta(\emptyset) = 0$. Mas, como $|\mathcal{P}_n| = 2^{n-1}$, temos

$$\sum_{A' \in \mathcal{P}_n} \Delta(A' \cup \{n+1\}) = \sum_{\emptyset \neq A' \in \mathcal{P}_n} \Delta(A') + 2^{n-1}(n+1).$$

(b) se $A' \in \mathcal{I}_n$, digamos $A' = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$, com $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2k+1}$, então

$$\begin{aligned} \Delta(A' \cup \{n+1\}) &= \Delta(\{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}, n+1\}) \\ &= (x_{k+2} + \cdots + x_{2k+1} + (n+1)) \\ &\quad - (x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1}) \\ &= (n+1) + (x_{k+1} + \cdots + x_{2k+1}) \\ &\quad - (x_1 + \cdots + x_k) - 2x_{k+1} \\ &= (n+1) + \Delta(A') - 2x_{k+1}. \end{aligned}$$

Observe que $x_{k+1} \in I_n$ é o *elemento central* de $A' \in \mathcal{I}_n$. Portanto, denotando por $c(A')$ o elemento central de $A' \in \mathcal{I}_n$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A' \cup \{n+1\}) &= \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} ((n+1) + \Delta(A') - 2c(A')) \\ &= (n+1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A') - 2 \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} c(A'). \end{aligned}$$

Agora, vimos no problema 7, página 18 (veja também o problema 16, página 42), que

$$\sum_{A' \in \mathcal{I}_n} c(A') = (n+1) \cdot 2^{n-2},$$

de sorte que

$$\sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A' \cup \{n+1\}) = \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A').$$

Substituindo os resultados dos itens (a) e (b) sucessivamente em (1.8) e (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \sum_{\substack{A \subset I_{n+1} \\ n+1 \in A}} \Delta(A) \\ &= d_n + (n+1)\cdot 2^{n-1} + \sum_{\emptyset \neq A' \in \mathcal{P}_n} \Delta(A') + \sum_{A' \in \mathcal{I}_n} \Delta(A') \\ &= d_n + (n+1)\cdot 2^{n-1} + \sum_{\emptyset \neq A' \subset I_n} \Delta(A') \\ &= 2d_n + (n+1)\cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Agora, como a sequência $n \mapsto \frac{d_{n+1}-2d_n}{2^{n-1}} = n+1$ é uma PA, segue que

$$\frac{d_{n+3}-2d_{n+2}}{2^{n+1}} + \frac{d_{n+1}-2d_n}{2^{n-1}} = 2 \cdot \frac{d_{n+2}-2d_{n+1}}{2^{n+1}},$$

relação esta que, após algumas simplificações, resulta na recorrência linear

$$d_{n+3} - 6d_{n+2} + 12d_{n+1} - 8d_n = 0.$$

Por fim, aplicando o resultado do exemplo 4.20 de [11], obtemos

$$d_n = (n^2+n+2)\cdot 2^{n-3}.$$

□

Há outras tantas situações combinatórias recursivas que recaem em relações de recorrência mais complicadas que as examinadas acima. No capítulo 3, desenvolveremos uma teoria razoavelmente geral para a abordagem do problema do cálculo de a_n em função de n, para uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo uma relação de recorrência da forma (1.6); em particular, com os métodos lá desenvolvidos, seremos capazes de resolver as recorrências de todos os exemplos discutidos acima. A esse respeito, veja também o capítulo 9 de [15].

Problemas – Seção 1.3

1. Mostre que todo polígono convexo de n lados admite exatamente $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja a_n o número de maneiras de escrever n como soma de parcelas iguais a 1, 3 ou 4. Prove que $a_{n+4} = a_{n+3} + a_{n+1} + a_n$, para todo $n \geq 1$.

3. Dispomos de um tabuleiro $2 \times n$, o qual deve ser coberto com peças de formato 1×2, sem que haja superposições de peças nem fiquem descobertas casas 1×1 do tabuleiro. Se a_n denota o número de tais coberturas, faça os seguintes itens:

   (a) Prove que $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$, para todo inteiro $k \geq 1$.

   (b) Calcule a_n em função de n.

4. São dados n círculos no plano ($n > 1$), tais que dois quaisquer deles têm uma corda comum mas não há três passando por um mesmo ponto. Calcule o número de regiões em que tais círculos dividem o plano.

5. * São dados $n \in \mathbb{N}$ e um conjunto A com n elementos.

   (a) Se a_n e b_n denotam, respectivamente, os números de subconjuntos de A com números pares e ímpares de elementos, use um argumento recursivo para mostrar as igualdades $a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = b_n$.

(b) Conclua que A tem exatamente 2^{n-1} subconjuntos com quantidades pares de elementos e 2^{n-1} subconjuntos com quantidades ímpares de elementos.

6. Calcule a quantidade de números naturais n de dez algarismos, tal que n é divisível por 3.

7. * Para $k, n \in \mathbb{N}$, definimos o **número de Stirling de segundo tipo**[4] $S(n, k)$ como o número de modos de particionar (não ordenadamente) um conjunto com n elementos em k subconjuntos (dois a dois disjuntos e) não vazios. Por exemplo, $S(3, 2) = 3$, haja vista que

$$\{1, 2\} \cup \{3\}, \quad \{1, 3\} \cup \{2\}, \quad \text{e} \quad \{2, 3\} \cup \{1\}$$

são as únicas maneiras de particionar o conjunto $\{1, 2, 3\}$ em dois subconjuntos (disjuntos e) não vazios.

(a) Verifique que $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ e $S(n, k) = 0$ se $n < k$.

(b) Prove que, para $1 \leq k < n$, tem-se a recorrência

$$S(n + 1, k + 1) = S(n, k) + (k + 1)S(n, k + 1).$$

(c) Use os itens (a) e (b) para calcular o número de modos de distribuir 7 moedas distintas em 3 cofrinhos iguais, sem que nenhum cofrinho fique vazio.

8. Uma *bandeira com n listras* consiste de n faixas horizontais, onde cada faixa pode ser vermelha, branca ou azul e quaisquer duas faixas adjacentes têm cores distintas. Sob tais condições, pede-se:

(a) Calcular quantas são as possíveis bandeiras com n listras.

[4] Após o matemático escocês do século XVIII James Stirling. A respeito de números de Stirling de segundo tipo, veja também o problema 3, página 76.

(b) Se a_n denota o número de bandeiras com n listras, tais que a primeira e a última faixas têm cores distintas, mostre que $a_{n+1} + a_n = 3 \cdot 2^n$, para $n \geq 1$.

(c) Calcular a_n em função de n, para $n \geq 1$.

9. Um conjunto finito e não vazio A de inteiros positivos é *egoísta* se $|A| \in A$. Um conjunto egoísta A é *minimal* se A não contém um conjunto egoísta diferente de si mesmo. A esse respeito, faça os seguintes itens:

(a) Prove que o número de subconjuntos egoístas minimais de I_n que não contêm n coincide com o número de subconjuntos egoístas minimais de I_{n-1}.

(b) Dados $m \in \mathbb{Z}$ e $X \subset \mathbb{Z}$, denote por $X + m$ o conjunto $X + m = \{x + m; x \in X\}$. Mostre que, para $n > 2$, as correspondências

$$A \mapsto (A \setminus \{n\}) - 1 \quad \text{e} \quad B \mapsto (B + 1) \cup \{n\}$$

são bijeções, inversas uma da outra, entre a família dos subconjuntos egoístas minimais de I_n que contém n e a família dos subconjuntos egoístas minimais de I_{n-2}.

(c) Mostre que o número de subconjuntos egoístas minimais de I_n coincide com o n−ésimo número de Fibonacci F_n.

Para os próximos dois problemas, dado um conjunto finito e não vazio A de números reais, denotemos por $\sigma(A)$ e $\pi(A)$, a soma e o produto dos elementos de A, respectivamente, com a convenção de que, se A for unitário, digamos $A = \{a\}$, então $\sigma(A) = \pi(A) = a$.

10. Para $X \subset \mathbb{N}$ finito e não vazio, denote por a_X a soma

$$a_X = \sum_{\emptyset \neq A \subset X} \frac{1}{\pi(A)}.$$

Faça os seguintes itens:

(a) Se $m \in \mathbb{N} \backslash X$ e $Y = X \cup \{m\}$, mostre que $a_Y = \left(\frac{m+1}{m}\right) a_X + \frac{1}{m}$.

(b) Para $n \in \mathbb{N}$, escreva a_n para denotar a_{I_n}. Mostre que

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) a_n + \frac{1}{n+1}.$$

(c) Mostre que $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

11. (Estados Unidos - adaptado.) Para $X \subset \mathbb{N}$ finito e não vazio, denote por b_X a soma

$$b_X = \sum_{\emptyset \neq A \subset X} \frac{\sigma(A)}{\pi(A)}.$$

(a) Se $m \in \mathbb{N} \setminus X$ e $Y = X \cup \{m\}$, mostre que

$$b_Y = b_X + \sum_{\emptyset \neq A \subset X} \frac{m + \sigma(A)}{m\pi(A)} + 1 = \left(\frac{m+1}{m}\right) b_X + a_X + 1,$$

onde a_X é a soma definida no problema anterior.

(b) Para $n \in \mathbb{N}$, escreva b_n para denotar b_{I_n}. Mostre que

$$b_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right) b_n + (n+1).$$

(c) Deduza que, para $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$b_n = (n+1)^2 - (n+1)\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

12. (França – adaptado.) Dizemos que um conjunto X de números naturais é *bom* quando ele satisfaz a seguinte propriedade: para todo natural x, se $x \in X$, então $2x \notin X$. Para cada natural k, sejam $A_k = \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ e b_k o maior número de elementos que um subconjunto bom de A_k pode ter.

(a) Mostre, para todo $k \geq 2$, temos $b_k = b_{k-2} + 2^{k-1}$.

(b) Para n natural, calcule o valor de b_n em função de n.

1.4 Arranjos, combinações e permutações

Como aplicação das ideias da seção anterior, utilizamos argumentos recursivos para estabelecer três contagens específicas muito úteis, quais sejam, *arranjos sem repetição*, *permutações* e *combinações*. Para o que segue, lembre-se de que $I_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Começamos contando, na proposição a seguir, o número de funções injetivas entre dois conjuntos finitos e não vazios.

Proposição 1.20. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$. Se A é um conjunto com n elementos, então há exatamente $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ funções injetivas $f : I_k \to A$.*

Prova. Se B é um conjunto com m elementos, denotemos por a_{km} o número de funções injetivas $f : I_k \to B$.

Evidentemente, $a_{1n} = n$ (uma vez que há n possíveis escolhas para $f(1) \in A$) e, nesse caso, vale a fórmula do enunciado.

Suponha, doravante, que $k > 1$. Fixado $x \in A$, se $f : I_k \to A$ é uma função injetiva tal que $f(k) = x$, então a restrição de f a I_{k-1} é uma função injetiva $\tilde{f} : I_{k-1} \to A \setminus \{x\}$. Reciprocamente, dada uma função injetiva $\tilde{f} : I_{k-1} \to A \backslash \{x\}$, estendemos $\tilde{f}$ a uma função injetiva $f : I_k \to A$ pondo $f(k) = x$.

Como tais operações de restrição e extensão de funções injetivas são claramente inversas uma da outra, concluímos que há tantas funções injetivas $f : I_k \to A$ tais que $f(k) = x$ quantas forem as funções injetivas $\tilde{f} : I_{k-1} \to A \setminus \{x\}$, i.e., há exatamente $a_{k-1,n-1}$ tais funções. Mas, como há n possíveis escolhas para $x \in A$ (uma vez que $|A| = n$), obtemos a recorrência

$$a_{kn} = n a_{k-1,n-1}, \tag{1.9}$$

para todo natural $n > 1$.

Observe agora que $a_{k1} = 0$ para todo $k > 1$ (uma vez que, se $|A| = 1$, não há como escolher $f(1)$ e $f(2)$ distintos em A). Por indução, suponha que $a_{kn} = 0$ sempre que $k > n$ e $1 \leq n < m$, onde $m > 1$ é um natural. Dados $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $k > m$, temos $k - 1 > m - 1$, de forma que, pela hipótese de indução, $a_{k-1,m-1} = 0$; mas, aí, (1.9) garante que $a_{km} = ma_{k-1,m-1} = 0$. Logo, segue por indução que $a_{kn} = 0$, para todos $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $k > n$. Ainda nesse caso, observe que $n-k+1 \leq 0$, de sorte que $n(n-1)\ldots(n-k+1) = 0$ e vale a fórmula do enunciado.

Suponha, doravante, que $k \leq n$. Então, novamente por (1.9), temos

$$\begin{aligned} a_{kn} &= na_{k-1,n-1} = n(n-1)a_{k-2,n-2} \\ &= \cdots \\ &= n(n-1)\ldots(n-k+2)a_{1,n-k+1} \\ &= n(n-1)\ldots(n-k+2)(n-k+1). \end{aligned}$$

□

Uma vez que uma função injetiva $f : I_k \to A$ é simplesmente uma sequência de k termos, os quais são elementos distintos de A, podemos refrasear a proposição acima conforme o corolário a seguir.

Corolário 1.21. *Se $|A| = n$, então há exatamente $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ sequências de k termos, os quais são elementos distintos de A.*

Poderemos aplicar o corolário acima a um problema de contagem, sempre que se pedir calcular quantas são as *escolhas ordenadas de k elementos distintos* de um conjunto dado A; por tal razão, diremos doravante que o corolário acima conta o número de **arranjos sem repetição** de k elementos, escolhidos de um conjunto A com n elementos.

Exemplo 1.22. *Quantos são os números naturais de três algarismos distintos?*

Solução. Escolher um número de três algarismos distintos é o mesmo que escolher uma sequência (a, b, c) tal que $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ sejam dois a dois distintos e $a \neq 0$. Para efetuar tal contagem é suficiente, pelo corolário 1.4, contar quantas são as sequências (a, b, c), com $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ distintos, *descontando*, em seguida, o número de sequências da forma $(0, b, c)$, com b e c distintos entre si e de 0.

Pelo corolário anterior, as sequências (a, b, c) sem a restrição $a \neq 0$ são, ao todo, $10 \times 9 \times 8 = 720$; as sequências $(0, b, c)$, com $b, c \neq 0$ e distintos, são, ao todo, $9 \times 8 = 72$. Portanto, o resultado desejado é $720 - 72 = 648$. □

A contagem de arranjos sem repetição tem uma consequência muito importante, baseada na definição a seguir.

Definição 1.23. *Uma* **permutação** *dos elementos de um conjunto não vazio A é uma bijeção $f : A \to A$.*

Se A é finito e não vazio, não é difícil provar (cf. problema 4, página 9) que uma função $f : A \to A$ é bijetiva se, e somente se, é injetiva. Portanto, fazendo $k = n$ na fórmula da proposição 1.20, obtemos imediatamente nosso próximo resultado.

Corolário 1.24. *Se $|A| = n$, então há exatamente $n!$ permutações dos elementos de A.*

Dados um conjunto finito A com n elementos e um natural k tal que $0 \leq k \leq n$, o próximo resultado utiliza um argumento recursivo para calcular a quantidade de subconjuntos de k elementos do conjunto A. Para seu enunciado, lembre-se (cf. seção 6.1 de [11]) de que, para n e k inteiros não negativos, com $0 \leq k \leq n$, o número binomial $\binom{n}{k}$ é definido por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e se trata de um número natural. Lembre-se, ainda, de que tais números satisfazem a recorrência

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

para $1 \leq k \leq n$, a qual é conhecida como a *relação de Stifel*.

Proposição 1.25. *Se A é um conjunto finito com n elementos e $0 \leq k \leq n$, então A possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos de k elementos.*

Prova. Se $k = 0$, nada há a fazer, uma vez que $\emptyset$ é o único subconjunto de A com 0 elementos e $\binom{n}{0} = 1$. Suponha, pois, que $1 \leq k \leq n$ e seja C_k^n o número de subconjuntos de A com k elementos.

Fixado $x \in A$, há dois tipos de subconjuntos de A com k elementos: os que não contêm x e os que contêm x. Os subconjuntos de k elementos de A que não contêm x são precisamente os subconjuntos de k elementos de $A \setminus \{x\}$; como $|A \setminus \{x\}| = n - 1$, concluímos que há exatamente C_k^{n-1} de tais subconjuntos de A.

Por outro lado, se $B \subset A$ tem k elementos e $x \in B$, então $B \setminus \{x\} \subset A \setminus \{x\}$ tem $k - 1$ elementos; reciprocamente, se $B' \subset A \setminus \{x\}$ tem $k - 1$ elementos, então $B' \cup \{x\} \subset A$ tem k elementos, um dos quais é x. Como tais correspondências são claramente inversas uma da outra, concluímos que há tantos subconjuntos de A com k elementos, um dos quais é x, quantos forem os suconjuntos de $k-1$ elementos de $A \setminus \{x\}$; assim, há exatamente C_{k-1}^{n-1} de tais subconjuntos de A.

Levando em conta as duas contribuições acima, obtemos a recorrência

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1},$$

para $1 \leq k \leq n$, a qual é idêntica à relação de Stifel para os números binomiais $\binom{n}{k}$. Por fim, como $C_0^n = 1 = \binom{n}{0}$ e $C_1^n = n = \binom{n}{1}$ (pois A tem exatamente um subconjunto sem elementos – o conjunto vazio – e exatamente n subconjuntos com 1 elemento – os conjuntos $\{x\}$, com $x \in A$), segue por indução que $C_k^n = \binom{n}{k}$, para $0 \leq k \leq n$. □

Em palavras, a proposição anterior calcula quantas são as escolhas *não ordenadas* de k elementos distintos de um conjunto de n elementos; dizemos que tais escolhas são as **combinações (simples) de n objetos tomados k a k**. Também graças à proposição anterior, é costume nos referirmos ao número binomial $\binom{n}{k}$ por *"n escolhe k"*.

Exemplo 1.26. *Quando todas as diagonais de um certo octógono convexo foram traçadas, verificou-se que não havia três delas passando por um mesmo ponto, que não um vértice do polígono. Nessas condições, quantos, dentre os pontos de interseção de duas das diagonais, eram interiores ao octógono?*

Solução. Note inicialmente que, pela condição sobre as diagonais do octógono, cada ponto de interseção que queremos contar é determinado por um único par de diagonais. Portanto, basta calcularmos quantos pares de diagonais do octógono intersectam-se no interior do mesmo.

Para tanto, veja que cada subconjunto de quatro dos vértices do octógono determina duas diagonais que se intersectam no interior do mesmo; reciprocamente, se duas diagonais do octógono se intersectam em seu interior, então o conjunto de suas extremidades é um subconjunto de quatro vértices do mesmo. Portanto, pelo princípio bijetivo, há tantos pares de diagonais do octógono intersectando-se em seu interior quantos forem os subconjuntos de quatro elementos do conjunto de seus vértices. Pela proposição 1.25, o número de pontos de interseção é, então, $\binom{8}{4} = 70$. □

O próximo exemplo traz uma bela aplicação de combinações simples, devida ao matemático americano Irving Kaplansky e conhecida na literatura como o **primeiro lema de Kaplansky**.

Exemplo 1.27 (Kaplansky). *Dados $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2k-1$, mostre que o número de subconjuntos de I_n com k elementos, dois quaisquer não consecutivos, é igual a $\binom{n-k+1}{k}$.*

Prova. Observe inicialmente que se $A \subset I_n$ é um subconjunto com k elementos, dois quaisquer não consecutivos, então $n \geq 2k - 1$, posto que entre dois elementos de A há pelo menos um elemento de I_n que não pertence a A. Portanto, a exigência de que $n \geq 2k - 1$, feita no enunciado, é natural e garante que $n - k + 1 \geq k$, de sorte que o número binomial $\binom{n-k+1}{k}$ está bem definido.

Agora, lembre-se de que a função característica de A em I_n é uma sequência de n termos, sendo k deles iguais a 1 e $n - k$ iguais a 0, e tal que dois quaisquer dos 1's são não consecutivos. Como a função característica determina o conjunto, basta contarmos quantas são tais sequências.

Para o que falta, considere inicialmente uma sequência de $2(n - k) + 1$ termos, na qual os $n - k$ termos de índice par são iguais a 0.

$$\underbrace{(_, 0, _, 0, _, \ldots, _, 0, _)}_{2(n-k)+1}$$

A fim de que haja exatamente k termos iguais a 1, sendo dois quaisquer deles não consecutivos, é necessário e suficiente escolher, do conjunto das $n - k + 1$ posições ímpares, as k posições em que os termos serão iguais a 1 (observe que, como frisamos anteriormente, $n-k+1 \geq k$); de acordo com a proposição 1.25, há precisamente $\binom{n-k+1}{k}$ escolhas possíveis para tais posições. Por fim, apagando as posições não escolhidas, ficamos com uma sequência satisfazendo as condições do enunciado. Reciprocamente, é imediato que toda sequência satisfazendo as condições do enunciado pode ser assim obtida, de modo que a resposta ao problema de contagem em questão é $\binom{n-k+1}{k}$. □

Dados n e k naturais e k tipos distintos de objetos, digamos a_1, ..., a_k, gostaríamos de contar quantas são as sequências de n termos, com n_1 termos iguais a a_1, n_2 termos iguais a a_2, ..., n_k termos iguais a a_k; aqui, n_1, ..., n_k são inteiros não negativos também dados, tais que $n = n_1 + \cdots + n_k$. De outro modo, dizemos que uma tal sequência

é uma **permutação com elementos repetidos** de n objetos, cada um dos quais de um dos tipos $a_1, \ldots, a_k$, sendo n_1 deles iguais a a_1, ..., n_k deles iguais a a_k. Analisemos, agora, um problema equivalente.

Se $f : I_n \to \{a_1, \ldots, a_k\}$ é uma sequência satisfazendo as condições acima (i.e., tal que n_1 termos são iguais a a_1, ..., n_k termos são iguais a a_k), então, tomando imagens inversas, obtemos

$$I_n = f^{-1}(a_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(a_k),$$

onde, na união do segundo membro acima, os conjuntos $f^{-1}(a_j)$, $1 \leq j \leq k$, são dois a dois disjuntos e tais que $|f^{-1}(a_j)| = n_j$, para $1 \leq j \leq k$; dizemos que a união do segundo membro acima é a *partição* de I_n *induzida* por f. Reciprocamente, associada a uma partição de I_n da forma $I_n = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, com $|A_j| = n_j$ para $1 \leq j \leq k$, temos a sequência $f : I_n \to \{a_1, \ldots, a_k\}$ tal que $f(A_j) = \{a_j\}$, para $1 \leq j \leq k$. Portanto, pelo princípio bijetivo, um problema equivalente ao do parágrafo anterior é o de contar quantas são as partições de um conjunto de n elementos em k subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$, prescrevendo-se que $|A_1| = n_1, \ldots, |A_k| = n_k$.

Isto posto, o resultado a seguir resolve ambos os problemas descritos acima.

Proposição 1.28. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$ e $n = n_1 + \cdots + n_k$ uma partição de n em inteiros positivos. Se A é um conjunto com n elementos e $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k}$ denota o número de partições de A em conjuntos A_1, ..., A_k, tais que $|A_j| = n_j$ para $1 \leq j \leq k$, então*

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_k!}. \tag{1.10}$$

Prova. Façamos indução sobre $k \in \mathbb{N}$. Observamos inicialmente que o caso $k = 1$ é trivial, posto que, nesse caso, $n_1 = n$ e o único subconjunto de A com n elementos é ele mesmo. Suponha, por hipótese de indução, que (1.10) é verdadeira para $1 \leq k < l$, onde $l \geq 2$ é um

natural, e toda partição de n em k inteiros positivos $n_1, \ldots, n_k$. Fixe, então, uma partição $n = n_1 + \cdots + n_l$, de n em inteiros positivos.

Pelo princípio bijetivo, para cada subconjunto A_l de A tal que $|A_l| = n_l$, há tantas partições de A como se pede quantas forem as partições

$$A \setminus A_l = A_1 \cup \ldots \cup A_{l-1},$$

de $A \setminus A_l$ em $l-1$ subconjuntos $A_1, \ldots, A_{l-1}$, com $|A_j| = n_j$ para todo $1 \leq j \leq l-1$.

Como $|A \setminus A_l| = n - n_l$, o número de tais partições de $A \setminus A_l$ é, por definição, igual a $\binom{n-n_l}{n_1,\ldots,n_{l-1}}$; mas como há $\binom{n}{n_l}$ maneiras de escolher o subconjunto A_l de A, o princípio fundamental da contagem fornece a recorrência

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_l} = \binom{n - n_l}{n_1, \ldots, n_{l-1}} \binom{n}{n_l}.$$

Por fim, aplicando a hipótese de indução a $\binom{n-n_l}{n_1,\ldots,n_{l-1}}$, concluímos que

$$\binom{n}{n_1, \ldots, n_l} = \frac{(n - n_l)!}{n_1! \ldots n_{l-1}!} \cdot \binom{n}{n_l} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_{l-1}! n_l!}.$$

□

Observação 1.29. *Nas notações da proposição acima, vale notar que*

$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k},$$

onde o segundo membro denota o número binomial usual. Tal igualdade é condizente com o fato combinatório de que escolher um subconjunto de k elementos de um conjunto de n elementos é o mesmo que particionar tal conjunto em dois conjuntos, um com k elementos e outro com $n-k$ elementos.

Problemas – Seção 1.4

1. Se $n \in \mathbb{N}$ e $|A| = n$, prove que há exatamente $n^k - n(n-1)\ldots(n-k+1)$ sequências de tamanho k, cujos termos são elementos de A, não todos distintos.

2. Faça os dois itens a seguir:

   (a) Utilize um argumento combinatório para provar a fórmula de expansão binomial

   $$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \qquad (1.11)$$

   (b) Generalize o item (a), provando a **fórmula de expansão multinomial**

   $$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{Z}_+ \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k} x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}, \qquad (1.12)$$

   onde $\binom{n}{n_1,\ldots,n_k}$ é definido, para $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}_+$ tais que $n = n_1 + \cdots + n_k$, como em (1.10).

3. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, use o resultado da proposição 1.28, juntamente com o item (b) do problema anterior, para calcular novamente o número de partições (ordenadas) de um conjunto A, com $|A| = n$, em k subconjuntos $A_1, \ldots, A_k$ (cf. problema 8, página 10).

4. Prove que o número de Stirling de segundo tipo $S(n,k)$ (cf. problema 7, página 28) pode ser calculado de acordo com a fórmula abaixo:

   $$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_k \in \mathbb{N} \\ n_1+\cdots+n_k=n}} \binom{n}{n_1, \ldots, n_k}.$$

5. Para uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dizemos que a_j é um *máximo local* se a_j for maior que seus vizinhos (para $j = 1$, isso significa que $a_1 > a_2$; para $j = n$, que $a_n > a_{n-1}$). Calcule o número permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$ com exatamente um máximo local.

6. (OCM.) Dados $n \geq 6$ pontos sobre um círculo, traçamos todas as cordas determinadas por dois desses n pontos. Se não há três de tais cordas que concorrem no interior do círculo, calcule o número de triângulos tendo seus vértices no interior do círculo e seus lados sobre três das $\binom{n}{2}$ cordas traçadas.

7. * Use combinações simples para provar que um conjunto com n elementos possui 2^{n-1} subconjuntos com quantidades pares de elementos e 2^{n-1} subconjuntos com quantidades ímpares de elementos.

8. * Dados $n, k \in \mathbb{N}$, mostre que o número de soluções inteiras não negativas da equação $x_1 + \cdots + x_k = n$ é $\binom{n+k-1}{k-1}$.

9. * Dados $n, k \in \mathbb{N}$, mostre que o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + \cdots + x_k = n$ é $\binom{n-1}{k-1}$.

10. O objetivo deste problema é dar uma outra prova do primeiro lema de Kaplansky (cf. exemplo 1.27). Para tanto, faça os seguintes itens:

    (a) Se $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset I_n$ é um conjunto sem elementos consecutivos, faça $x_1 = a_1 - 1$, $x_{k+1} = n - a_k$ e, para $2 \leq j \leq k$, $x_j = a_j - a_{j-1} - 2$. Mostre que $x_1, \ldots, x_{k+1}$ é uma solução, em inteiros não negativos, da equação $x_1 + \cdots + x_{k+1} = n - 2k + 1$.

    (b) Se $x_1, \ldots, x_{k+1}$ é uma solução, em inteiros não negativos, da equação $x_1 + \cdots + x_{k+1} = n - 2k + 1$, mostre como obter, a partir dela, um conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset I_n$ sem elementos consecutivos.

    (c) Obtenha o primeiro lema de Kaplansky a partir do resultado dos itens (a) e (b) e do problema 8.

Para o próximo problema, definimos um **multiconjunto** como um par ordenado (A, f), onde A é um conjunto e f é uma função de A em $\mathbb{N}$. Se $x \in A$, diremos que x é um *elemento* do multiconjunto (A, f); neste caso, $f(x) \in \mathbb{N}$ é a *frequência* de x como elemento de (A, f). Um multiconjunto (A, f) é *finito* se A for um conjunto finito. Neste caso, o *número de elementos* do multiconjunto é definido como a soma das frequências dos elementos de A como elementos de (A, f); em símbolos,

$$|(A, f)| = \sum_{x \in A} f(x). \tag{1.13}$$

Informalmente, denotamos um multiconjunto (A, f) por A_f (ou mesmo A, quando f estiver subentendida e não houver perigo de confusão com o conjunto A); declaramos A_f entre chaves duplas, em vez de chaves simples (como ocorre com declarações de conjuntos), repetindo cada $x \in A$ exatamente $f(x)$ vezes; por exemplo, se $A = \{a, b, c\}$ e $f : A \to \mathbb{N}$ é dada por $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$, escrevemos

$$A_f = \{\{a, a, b, b, b, c\}\}$$

para declarar o multiconjunto A_f.

11. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \geq k$, e um conjunto A com k elementos, calcule o número de multiconjuntos (A, f) com n elementos.

12. Para cada $n > 1$ inteiro, prove que o número de subconjuntos de I_{2n} com quantidades iguais de elementos pares e ímpares é igual a $\binom{2n}{n}$.

13. São dados naturais m e n, com $m > n$. Se

$$\mathcal{F} = \{(A_1, \ldots, A_n);\ A_1, \ldots, A_n \subset I_m\},$$

calcule, em função de m e n, o valor da soma

$$\sum_{(A_1,\ldots,A_n)\in\mathcal{F}} |A_1 \cup \ldots \cup A_n|.$$

14. Para cada permutação $\sigma = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, seja

$$S_\sigma = (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)^2.$$

Mostre que

$$\frac{1}{n!}\sum_\sigma S_\sigma = \binom{n+1}{3},$$

onde, na soma acima, σ varia sobre todas as $n!$ permutações do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

15. (São Petesburgo - adaptado.) São dados $2n+1$ pontos sobre um círculo, tais que dois quaisquer deles não são extremidades de um diâmetro. Prove que, dentre os triângulos que têm três desses $2n+1$ pontos por vértices, no máximo $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ são acutângulos.

16. * O objetivo deste problema é utilizar o material desenvolvido nesta seção para dar uma outra solução para o problema 7, página 18. Para tanto, faça os seguintes itens:

(a) Fixado $1 \leq i \leq n$, mostre que i é o elemento central de exatamente

$$\sum_j \binom{i-1}{j}\binom{n-i}{j} = \binom{n-1}{i-1}$$

conjuntos $A \in \mathcal{I}_n$, onde a soma acima se estende aos índices $0 \leq j \leq \min\{i-1, n-i\}$.

(b) Conclua que

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_n} c(A) = \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} i = (n+1)\cdot 2^{n-2}.$$

17. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $f : I_n \to I_n$ uma função tal que $f(f(x)) = x$, para todo $x \in I_n$.

(a) Mostre que f é uma bijeção e que, se f tem exatamente k pontos fixos, então $n-k$ deve ser par.

(b) Reciprocamente, dado $0 \leq k \leq n$ tal que $n-k$ é par, mostre que para cada escolha de k elementos $x_1, \ldots, x_k \in I_n$ e para cada partição $\{\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_l, b_l\}\}$ dos $n-k$ elementos restantes de I_n em subconjuntos de dois elementos, existe uma única função $f : I_n \to I_n$ que tem $x_1, \ldots, x_k$ como pontos fixos e satisfaz $f(a_i) = b_i$ e $f(f(x)) = x$, para todo $x \in I_n$.

(c) Conclua que o número de funções $f : I_n \to I_n$ tais que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in I_n$ é dado por

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ n-k \text{ par}}} \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{\underbrace{2,\ldots,2}_{(n-k)/2}} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n\\ n-k \text{ par}}} \frac{n!}{k!\cdot 2^{\frac{n-k}{2}}}.$$

18. * (BMO - adaptado.)[5] Sejam $n > 2$ inteiro e $\mathcal{F}$ uma família qualquer de subconjuntos de três elementos do conjunto I_n, tal que, se $A, B \in \mathcal{F}$ e $A \neq B$, então $|A \cap B| \leq 1$. Prove que

$$|\mathcal{F}| \leq \frac{1}{6}(n^2 - n).$$

19. (Romênia.) Sejam dados $k, m \in \mathbb{N}$, com $m \geq k$, e um conjunto A com m elementos. Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos distintos

[5]Para a outra metade do problema original, veja o exemplo 2.29.

de A, tais que $|A_i| \geq k$ para $1 \leq i \leq n$ e $|A_i \cap A_j| \leq k-1$ para $1 \leq i < j \leq n$. Prove que $n \leq \binom{m}{k}$.

20. Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e $P_1, P_2, \ldots, P_n$ subconjuntos dois a dois distintos de A, todos com dois elementos e tais que

$$P_i \cap P_j \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, 1 \leq k \leq n;\ P_k = \{a_i, a_j\}.$$

Prove que cada elemento de A pertence a exatamente dois dos conjuntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

CAPÍTULO 2

Mais Técnicas de Contagem

Colecionamos, neste capítulo, algumas técnicas de contagem um tanto menos elementares do que as constantes do capítulo anterior. Discutimos inicialmente o princípio da inclusão-exclusão, o qual se constitui numa fórmula útil para o cálculo do número de elementos de uma união finita de conjuntos finitos, apresentando duas aplicações clássicas do mesmo; em seguida, introduzimos a noção de contagem dupla como ferramenta de contagem, contando um certo número de configurações de duas maneiras distintas a fim de inferir um certo resultado. O capítulo continua com uma breve discussão sobre relações de equivalência e seu papel como ferramenta de contagem, o qual é ilustrado, dentre outros, por meio de um famoso teorema de B. Bollobás. Terminamos estudando a menos elementar dentre as técnicas discutidas neste capítulo, qual seja, a introdução de uma métrica[1] apropriada

[1] No sentido de espaços métricos (veja a discussão da seção 2.4).

ao problema sob análise, a qual nos permite contar a quantidade de configurações de interesse pela utilização de coberturas adequadas do conjunto em questão com bolas.

2.1 O princípio da inclusão-exclusão

Começamos estendendo a relação da proposição 1.5 para o número de elementos de uma união de dois conjuntos finitos. O teorema a seguir é conhecido como o **princípio da inclusão-exclusão** ou, ainda, a **fórmula do crivo**, e é devido ao matemático francês do século XVIII Abraham de Moivre.

Teorema 2.1 (de Moivre). *Se A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos finitos, então*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \quad (2.1)$$

com a última soma acima se estendendo a todas as sequências (i_1, i_2, ..., i_k), tais que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$.

Prova. Fixe $x \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e suponha que x pertence a exatamente l dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Mostremos que a fórmula do segundo membro acima conta x exatamente uma vez. Para tanto, para $1 \leq k \leq n$ fixado, x é contado no somatório

$$\sum_{i_1<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$$

tantas vezes quantas forem as sequências $(i_1, \ldots, i_k)$ tais que $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ e $x \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Como x pertence a exatamente l dos conjuntos dados, podemos nos restringir ao caso em que $k \leq l$; de fato, se $k > l$, então x não pertencerá a pelo menos um dos conjuntos $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, de sorte que $x \notin A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Sendo $k \leq l$,

há tantas sequências $(i_1, \ldots, i_k)$ como acima quantos forem os modos de escolhermos k desses l conjuntos, i.e., há $\binom{l}{k}$ de tais sequências. Portanto, o número de vezes em que x é contado no segundo membro de (2.1) é igual a

$$\sum_{k=1}^{l}(-1)^{k-1}\binom{l}{k} = \binom{l}{0} - \sum_{k=0}^{l}(-1)^{k}\binom{l}{k} = 1 - (1-1)^l = 1,$$

onde utilizamos a fórmula de expansão binomial na segunda igualdade acima. □

Exemplo 2.2. *Seja dado um natural $n \geq 3$. Mostre que não existem conjuntos A_1, A_2, ..., A_n, com n elementos cada e satisfazendo as seguintes condições:*

(a) Dois quaisquer dos A_i's têm exatamente dois elementos em comum.

(b) Três quaisquer dos A_i's têm interseção vazia.

Solução. Suponha que existam conjuntos A_1, A_2, ..., A_n satisfazendo as condições do enunciado. Se mostrarmos que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = n$, teremos $A_i \subset A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ e $|A_i| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, para $1 \leq i \leq n$, de sorte que $A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, para $1 \leq i \leq n$. Em particular, teremos $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, e a condição do item (b) nos fornecerá uma contradição.

Para o que falta, calculemos o número de elementos do conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, com o auxílio do princípio da inclusão-exclusão:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{i_1<\cdots<i_k} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| \\ &= \sum_{i_1} |A_{i_1}| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}|,\end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} = \emptyset$, para $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$. Note agora que

$$\sum_{i_1} |A_{i_1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

e

$$\sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| = \sum_{i_1 < i_2} 2 = 2\binom{n}{2} = n(n-1),$$

uma vez que há exatamente $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ escolhas possíveis para i_1 e i_2 tais que $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$. Portanto, o conjunto $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ tem exatamente $n^2 - n(n-1) = n$ elementos. □

Uma outra prova da fórmula do crivo pode ser dada pela utilização das propriedades de funções características de conjuntos (cf. a definição 1.11). Para tanto, precisamos de dois resultados preliminares sobre tais funções.

Lema 2.3. *Seja A um conjunto não vazio. Se B e C são subconjuntos de A, então:*

(a) $\chi_B = \chi_C \Leftrightarrow B = C$.

(b) $\chi_{B \cap C} = \chi_B \chi_C$.

(c) $\chi_{B^c} = 1 - \chi_B$.

(d) $\chi_{B \cup C} = \chi_B + \chi_C - \chi_B \chi_C$.

Prova. Exercício (veja o problema 1). □

Proposição 2.4. *Seja A um conjunto finito e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de A. Se $\chi, \chi_j : A \to \{0,1\}$ denotam respectivamente as funções características de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e A_j em A, então*

$$\chi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - \chi_j(x)), \tag{2.2}$$

para todo $x \in A$.

Prova. Para $x \in A$, temos

$$\begin{aligned}
\chi(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A_1 \cup \ldots \cup A_n \\
&\Leftrightarrow \exists\, 1 \leq j \leq n;\ x \in A_j \\
&\Leftrightarrow \exists\, 1 \leq j \leq n;\ \chi_j(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \prod_{j=1}^{n} (1 - \chi_j(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - \chi_j(x)) = 1.
\end{aligned}$$

Logo, os dois membros de (2.2) coincidem para todo $x \in A$, conforme desejado. □

Observe agora que, se $B \subset A$ é finito, então

$$|B| = \sum_{x \in A} \chi_B(x). \tag{2.3}$$

Por outro lado, nas notações da proposição anterior, temos

$$\begin{aligned}
\chi(x) &= 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - \chi_j(x)) \\
&= 1 - \left(1 + \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^k \chi_{i_1}(x) \ldots \chi_{i_k}(x)\right) \\
&= \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (-1)^{k-1} \chi_{i_1 \ldots i_k}(x),
\end{aligned}$$

onde $\chi_{i_1 \ldots i_k}$ denota a função característica de $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ e utilizamos o item (b) do lema 2.3 na última igualdade. Portanto, segue daí e de

(2.3) que

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| &= \sum_{x \in A} \chi(x)\\ &= \sum_{x\in A}\sum_{1\le k\le n}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(-1)^{k-1}\chi_{i_1\ldots i_k}(x)\\ &= \sum_{1\le k\le n}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(-1)^{k-1}\sum_{x\in A}\chi_{i_1\ldots i_k}(x)\\ &= \sum_{1\le k\le n}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(-1)^{k-1}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}|.\end{aligned}$$

A seguir, expomos duas aplicações clássicas do princípio da inclusão-exclusão. Para a primeira delas, convencionamos dizer que uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de I_n é **caótica** se $a_i \neq i$, para $1 \le i \le n$, i.e., se a função $f : I_n \to I_n$ tal que $f(i) = a_i$, para $1 \le i \le n$, não possuir pontos fixos. Calculamos, no próximo exemplo, quantas são tais permutações.

Exemplo 2.5. *Para $n > 1$ inteiro, há precisamente*

$$d_n = n!\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!} \tag{2.4}$$

permutações caóticas de I_n (a esse respeito, veja também o problema 8, página 117).

Prova. Seja $\mathcal{D}_n$ o conjunto das permutações caóticas de I_n e, para $1 \le i \le n$, seja $\mathcal{C}_i$ o conjunto das permutações de I_n tais que $a_i = i$. Sendo $\mathcal{P}_n$ o conjunto de todas as permutações de I_n, temos claramente

$$\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{D}_n = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n.$$

Portanto, segue do princípio da inclusão-exclusão que

$$\begin{aligned}|\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{D}_n| &= |\mathcal{C}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_n|\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}|\mathcal{C}_{i_1}\cap\ldots\cap\mathcal{C}_{i_k}|.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Como $d_n = |\mathcal{D}_n|$, temos

$$|\mathcal{P}_n \setminus \mathcal{D}_n| = |\mathcal{P}_n| - |\mathcal{D}_n| = n! - d_n.$$

Por outro lado, como

$$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{C}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{i_k} \Leftrightarrow a_{i_1} = i_1, \ldots, a_{i_k} = i_k,$$

para contarmos quantas são as permutações $(a_1, \ldots, a_n)$ de I_n em $\mathcal{C}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{i_k}$, basta contarmos quantas são as permutações de $I_n \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$. Mas, uma vez que tal conjunto tem $n-k$ elementos, segue que

$$|\mathcal{C}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{C}_{i_k}| = |\mathcal{P}_{n-k}| = (n-k)!.$$

Substituindo tais igualdades em (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}n! - d_n &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{i_1<\cdots<i_k}(n-k)!\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}(n-k)!\\ &= n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!},\end{aligned}$$

onde utilizamos, na penúltima igualdade, o fato de que há exatamente $\binom{n}{k}$ maneiras de escolher inteiros $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. Logo,

$$d_n = n! - n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!} = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

Exemplo 2.6. *São dados $m, n \in \mathbb{N}$ e conjuntos finitos A e B, tais que $|A| = m$ e $|B| = n$. Prove que o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é igual a*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Prova. Sejam $\mathcal{F}_{m,n}$ o conjunto das funções $f : A \to B$ e $\mathcal{S}_{m,n}$ o subconjunto de $\mathcal{F}_{m,n}$ formado pelas funções sobrejetoras. Sejam, ainda, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ e, para $1 \leq i \leq n$, $\mathcal{F}_i$ o conjunto das funções $f : A \to B$ tais que $b_i \notin \mathrm{Im}\,(f)$. Então,

$$\mathcal{F}_{m,n} \setminus \mathcal{S}_{m,n} = \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n,$$

e segue do princípio da inclusão-exclusão que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}_{m,n} \setminus \mathcal{S}_{m,n}| &= |\mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{F}_n| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |\mathcal{F}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{i_k}|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sendo $s_{m,n} = |\mathcal{S}_{m,n}|$, temos

$$|\mathcal{F}_{m,n} \setminus \mathcal{S}_{m,n}| = |\mathcal{F}_{m,n}| - |\mathcal{S}_{m,n}| = n^m - s_{m,n},$$

onde, na última igualdade, utilizamos a discussão do último parágrafo da seção 1.1. Por outro lado, dada uma função $f : A \to B$, temos

$$f \in \mathcal{F}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{i_k} \Leftrightarrow b_{i_1}, \ldots, b_{i_k} \notin \mathrm{Im}\,(f),$$

o que, por sua vez, equivale ao fato de que f pode ser vista como uma função de A em $B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}$. Mas, como $|B \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}| = n - k$, invocando novamente a discussão do último parágrafo da seção 1.1, obtemos

$$|\mathcal{F}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{F}_{i_k}| = |\mathcal{F}_{m,n-k}| = (n-k)^m.$$

Substituindo tais igualdades em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} n^m - s_{m,n} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (n-k)^m \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^m, \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, utilizamos o fato de que há $\binom{n}{k}$ modos de escolhermos inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Portanto,

$$s_{m,n} = n^m - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^m = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

□

Reobteremos os resultados dos dois exemplos anteriores, por outros métodos, no capítulo 3 (cf. problema 7, página 116, e problema 9, página 117).

Exemplo 2.7 (Romênia). *Calcule o número de modos de colorir os vértices de um dodecágono regular usando duas cores, de modo que nenhum conjunto monocromático de vértices forme o conjunto dos vértices de um polígono regular.*

Solução. Um tal polígono regular é um triângulo equilátero, um quadrado, um hexágono ou o próprio dodecágono. Observando inclusões, concluímos que basta exitarmos triângulos equiláteros e quadrados. Sejam vermelho (V) e azul (A) as cores utilizadas.

Há quatro triângulos equiláteros cujos vértices são vértices do dodecágono, e tais triângulos equiláteros têm conjuntos de vértices dois a dois disjuntos. Como cada um deles pode ser colorido de seis maneiras não monocromáticas, o números de colorações dos vértices do dodecágono sem triângulos equiláteros monocromáticos é $6^4 = 1296$.

Calculemos quantas dessas 1296 colorações contêm pelo menos um quadrado monocromático. Suponha, sem perda de generalidade, que o quadrado é monocromático vermelho. Cada um de seus vértices é vértice de exatamente um dos quatro triângulos equiláteros. Sendo tal vértice vermelho, restam aos outros dois vértices do triângulo equilátero correspondente as possibilidades de coloração AA, AV ou VA. Portanto, das 1296 colorações sem triângulos equiláteros monocromáticos, $2 \cdot 3 \cdot 3^4 = 486$ (2 cores, 3 quadrados e 3 possíveis colorações para

os outros dois vértices de cada um dos quatro triângulos equiláteros) têm exatamente um quadrado monocromático.

Calculemos, agora, quantas das 1296 colorações sem triângulos equiláteros monocromáticos contêm pelo menos dois quadrados monocromáticos. Para tanto, há dois casos a considerar, conforme os dois quadrados monocromáticos tenham ou não uma mesma cor. Para cada triângulo equilátero, exatamente um de seus vértices não é vértice de algum dos dois quadrados monocromáticos. Supondo-os (sem perda de generalidade) vermelhos, concluímos que há exatamente uma possibilidade de coloração para o terceiro vértice. Supondo-os um vermelho e o outro azul, concluímos que há exatamente duas possibilidades de coloração para o terceiro vértice. Como há $\binom{3}{2} = 3$ modos de escolhermos dois dos três quadrados, o número de colorações com pelo menos dois quadrados monocromáticos é

$$\binom{3}{2} \cdot \left(2 \cdot 1^4 + 2 \cdot 2^4\right) = 102$$

(note que, se os dois quadrados tiverem uma mesma cor, há duas possibilidades: ambos azuis ou ambos vermelhos; se eles tiverme diferentes, também há duas possibilidades: AV ou VA).

Por fim, calculemos quantas das 1296 colorações sem triângulos equiláteros monocromáticos contêm três quadrados monocromáticos. A inexistência de triângulos equiláteros monocromáticos impede que os quadrados tenham todos uma mesma cor. Portanto, há seis colorações possíveis para seus conjuntos de vértices: AAV, AVA, VAA, VVA, VAV e AVV.

Logo, pelo princípio da inclusão-exclusão, o número de colorações que queremos calcular é

$$1296 - 486 + 102 - 6 = 906.$$

□

Problemas – Seção 2.1

1. * Prove o lema 2.3.

2. * Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m < n$, prove que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m = 0.$$

3. Calcule, em função de $n \in \mathbb{N}$, o número de maneiras de colocar n casais em fila, de maneira que os cônjuges de cada casal não fiquem em posições vizinhas.

4. (Inglaterra.) Quantas permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ de I_6 existem tais que, para $1 \leq j \leq 5$, a sequência $(a_1, \ldots, a_j)$ não seja uma permutação de I_j? Justifique sua resposta.

O próximo problemas admite do leitor certa familiaridade com a decomposição de um natural $n > 1$ em um produto de potências primos, bem como com a noção de máximo divisor comum de dois inteiros. Para uma revisão dos conceitos necessários, sugerimos ao leitor reler a introdução ao capítulo 1 de [11] ou, para uma abordagem mais abrangente, ler o capítulo 1 de [14].

5. Sejam $p_1 < \cdots < p_k$ números primos, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{N}$ e $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Prove que o conjunto dos inteiros $1 \leq m \leq n$ tais que $\mathrm{mdc}\,(m, n) = 1$ tem exatamente

$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \tag{2.7}$$

elementos.

Para o problema a seguir, o leitor pode achar útil recordar o seguinte fato, cuja demonstração pode ser encontrada na seção 1.3 de [14]: se $n > 1$ é um natural que não é primo, então n admite um divisor primo menor ou igual a $\sqrt{n}$. Recorde, ainda, que a **parte inteira** de $x \in \mathbb{R}$, denotada $\lfloor x \rfloor$, é definida como o maior inteiro que é menor ou igual a x. Assim, por exemplo, $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ e $\lfloor \pi \rfloor = 3$.

6. Sejam $n > 1$ natural e $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ os primos menores ou iguais a $\sqrt{n}$. Prove que a quantidade de primos menores ou iguais a n é dada pela fórmula

$$n - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k} \left\lfloor \frac{n}{p_{i_1} \ldots p_{i_j}} \right\rfloor.$$

7. (Mongólia.) Dados $k, m, n \in \mathbb{N}$, seja $p = \min\left\{n, \frac{m}{k+1}\right\}$. Mostre que a equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ tem exatamente

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \binom{n}{j}\binom{m - j(k+1) + n - 1}{n-1}$$

soluções $(x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_t \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x_t \leq k$, para $1 \leq t \leq n$.

2.2 Contagem dupla

A técnica de contagem dupla nada mais é do que o princípio bijetivo em ação uma vez mais, todavia com uma mudança de enfoque. A ideia central (e extremamente simples) é que, se calcularmos um certo número de configurações de duas maneiras distintas sem cometer erros, então os resultados devem coincidir, fato que pode gerar conclusões interessantes.

Vejamos alguns exemplos, nos quais mostramos como reobter alguns resultados discutidos anteriormente com argumentos de contagem dupla.

Exemplo 2.8. *Se n e k são inteiros tais que $0 \leq k \leq n$, então todo conjunto com n elementos possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos com k elementos.*

Prova. Note inicialmente que basta considerar o caso $1 \leq k \leq n$. Para tanto, fixe um conjunto A com n elementos e considere o problema de contar quantas sequências de k termos, escolhidos a partir dos elementos de A, podemos formar. Pelo corolário 1.21, a resposta a esse problema é $n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Por outro lado, permutando os elementos de cada subconjunto de k elementos de A geramos $k!$ sequências de k termos; ademais, é imediato que as sequências assim formadas são todas as que podemos formar e são todas distintas. Portanto, se (como antes) C_k^n denota o número de subconjuntos de k elementos de A, concluímos que há exatamente $k!C_k^n$ sequências de k termos, escolhidos a partir dos elementos de A.

Mas, como $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ e $k!C_k^n$ são respostas para um mesmo problema de contagem, concluímos que

$$k!C_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)$$

e, daí,

$$\begin{aligned} C_k^n &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

O resultado do exemplo a seguir é conhecido como a **identidade de Lagrange**, em homenagem ao matemático francês do século XVIII Joseph L. Lagrange.

Exemplo 2.9. *Prove que, para todo inteiro positivo n, tem-se*

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Prova. Considere um grupo de $2n$ pessoas, sendo n homens e n mulheres, e calculemos, de duas maneiras distintas, quantos são os modos de escolher exatamente n das $2n$ pessoas.

Por um lado, a resposta obviamente é $\binom{2n}{n}$. Por outro lado, para $0 \leq k \leq n$, o princípio fundamental da contagem garante que podemos escolher k homens e $n-k$ mulheres de exatamente $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ maneiras; adicionando tais possibilidades quando k varia de 0 a n, obtemos a soma

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

como resposta alternativa para nosso problema, onde usamos, na última igualdade, o fato de que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Portanto, a igualdade do enunciado realmente ocorre. □

No que concerne o exemplo acima, a grande dificuldade na implementação de um argumento de contagem dupla residiu na capacidade de interpretarmos ambos os membros da igualdade desejada como resultados de contagens distintas do número de configurações possíveis de uma mesma situação combinatória.

Uma vez que não há regra geral sobre como criar um problema de contagem adequado à demonstração, por contagem dupla, de uma certa identidade, discutimos a seguir outro exemplo, com o intuito de mostrar ao leitor a variedade de possibilidades à nossa disposição.

Exemplo 2.10. *Sejam m e n inteiros positivos. Prove que*

$$\sum_j \binom{m}{j}\binom{n}{j} 2^j = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m},$$

onde os somatórios acima se estendem sobre todos os valores possíveis dos índices j e k.

Prova. Sejam A e B conjuntos disjuntos, com $|A| = m$ e $|B| = n$. Calculemos quantos são os pares ordenados (X, Y), com $X \subset A$ e $Y \subset B \cup X$ tal que $|Y| = m$.

Se $|X| = k$, então há $\binom{m}{k}$ modos de escolher X; para cada um de tais modos, a disjunção de A e B garante que $|B \cup X| = n+k$, de sorte que há $\binom{n+k}{m}$ modos de escolher Y. Portanto, aplicando sucessivamente os princípios multiplicativo e aditico, concluímos que o número de tais pares (X, Y) é

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}.$$

Escolhamos Y primeiro, agora. Mais precisamente, calculemos quantos são os pares (X, Y) satisfazendo as condições do problema e tais que $|Y \cap B| = j$. Há $\binom{n}{j}$ modos de escolher j elementos de B para Y; escolhidos tais elementos, resta escolher $m-j$ elementos para Y, os quais devem ser elementos de A. Há, então, $\binom{m}{m-j} = \binom{m}{j}$ modos de escolher tais $m-j$ elementos de A, e a condição $Y \subset B \cup X$ força que tais elementos pertençam a X. Excetuando-se tais $m-j$ elementos, os elementos restantes de X podem formar um subconjunto qualquer do conjunto formado pelos j elementos restantes de A, de forma que podemos escolher esse subconjunto de exatamente 2^j maneiras distintas. Portanto, o número de tais pares (X, Y) é exatamente

$$\sum_j \binom{n}{j}\binom{m}{j} 2^j.$$

Por fim, segue das duas contagens acima que a única possibilidade é termos a igualdade do enunciado. □

O exemplo a seguir ilustra como podemos utilizar um argumento de contagem dupla para obter uma desigualdade.

Exemplo 2.11 (IMO). *Sejam n e k inteiros positivos e $\mathcal{S}$ um conjunto de n pontos no plano satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $\mathcal{S}$ não contém três pontos colineares.

(b) Para todo ponto $P \in \mathcal{S}$, há ao menos k pontos de $\mathcal{S}$ equidistantes de P.

Prove que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Prova. Seja

$$\mathcal{F} = \{(A, B, C);\ A, B, C \in \mathcal{S} \text{ e } \overline{AB} = \overline{AC}\}.$$

Contemos $|\mathcal{F}|$ de duas maneiras distintas.

Inicialmente, para cada $A \in \mathcal{S}$ há pelo menos k pontos de $\mathcal{S}$ equidistantes de A e tais pontos geram, pelo menos, $k(k-1)$ pares (B, C) tais que $(A, B, C) \in \mathcal{F}$. Como há n possíveis escolhas para $A \in \mathcal{S}$, concluímos que

$$|\mathcal{F}| \geq nk(k-1).$$

Fixados agora $B, C \in \mathcal{S}$, afirmamos que há, no máximo, dois pontos A's em $\mathcal{S}$, tais que $(A, B, C) \in \mathcal{F}$. De fato, como um qualquer de tais A's pertence à mediatriz de BC, a condição (a) do enunciado garante que há, no máximo, dois deles. Mas, como há $n(n-1)$ possíveis escolhas para (B, C), concluímos que

$$|\mathcal{F}| \leq 2n(n-1).$$

Assim,

$$nk(k-1) \leq 2n(n-1)$$

e, daí,

$$k \leq \frac{1 + \sqrt{8n-7}}{2} < \frac{1 + \sqrt{8n}}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

□

Terminamos esta seção mostrando como utilizar um argumento de contagem dupla para estabelecer a fórmula (2.4) para o número de permutações caóticas de I_n. Antes, contudo, precisamos do seguinte resultado auxiliar, o qual encontrará utilidade também na seção 6.1 de [15].

Lema 2.12. *Se $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e $b_0, b_1, \ldots, b_n$ são números reais tais que $a_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} b_j$, para $0 \leq k \leq n$, então*

$$b_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k+j} \binom{k}{j} a_j, \tag{2.8}$$

para $0 \leq k \leq n$.

Prova. Façamos indução sobre $0 \leq k \leq n$, observando inicialmente que o resultado é óbvio se $k = 0$. Suponha, por hipótese de indução, que a igualdade (2.8) é válida quando $k = l-1$, para algum $1 \leq l \leq n$. Para $k = l$, temos

$$a_l = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} b_j = \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} b_j + b_l,$$

de maneira que, aplicando a hipótese de indução e o resultado do problema 1, obtemos

$$\begin{aligned}
b_l &= a_l - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} b_j \\
&= a_l - \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l}{j} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j+i} \binom{j}{i} a_i \\
&= a_l - \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j+i} \binom{l}{j} \binom{j}{i} a_i \\
&= a_l - \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=i}^{l-1} (-1)^{j+i} \binom{l}{j} \binom{j}{i} a_i.
\end{aligned}$$

Observando agora que

$$\binom{l}{j}\binom{j}{i} = \binom{l}{i}\binom{l-i}{l-j},$$

segue dos cálculos acima que

$$\begin{aligned} b_l &= a_l - \sum_{i=0}^{l-1}\sum_{j=i}^{l-1}(-1)^{j+i}\binom{l}{i}\binom{l-i}{l-j}a_i \\ &= a_l - \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\binom{l}{i}a_i\sum_{j=i}^{l-1}(-1)^j\binom{l-i}{l-j} \\ &= a_l - \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^i\binom{l}{i}a_i\sum_{t=1}^{l-i}(-1)^{l-t}\binom{l-i}{t} \\ &= a_l + \sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{l+i}\binom{l}{i}a_i = \sum_{i=0}^{l}(-1)^{l+i}\binom{l}{i}a_i, \end{aligned}$$

uma vez que

$$\sum_{t=1}^{l-i}(-1)^t\binom{l-i}{t} = \sum_{t=0}^{l-i}(-1)^t\binom{l-i}{t} - 1 = (1-1)^{l-i} - 1 = -1.$$

□

Podemos finalmente apresentar o exemplo prometido.

Exemplo 2.13. *Se d_n representa o número de permutações caóticas de I_n, então*

$$k! = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d_j. \tag{2.9}$$

Em particular, $d_k = k!\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}$.

Prova. Como no exemplo 2.5, seja $\mathcal{P}_k$ o conjunto de todas as permutações de I_k e contemos $|\mathcal{P}_k|$ de duas maneiras distintas. Por um lado, temos pelo corolário 1.24 que $|\mathcal{P}_k| = k!$. Por outro, para $0 \leq j \leq k$ fixado, se $\mathcal{F}_j$ denota o subconjunto de $\mathcal{P}_k$ formado pelas permutações de I_k com exatamente j pontos fixos, então

$$\mathcal{P}_k = \mathcal{F}_0 \cup \mathcal{F}_1 \cup \ldots \cup F_k;$$

mas, uma vez que a união do segundo membro é disjunta, segue que

$$|\mathcal{P}_k| = |\mathcal{F}_0| + |\mathcal{F}_1| + \cdots + |F_k|. \tag{2.10}$$

Agora, para $f \in \mathcal{F}_j$, podemos escolher os j pontos fixos de f de exatamente $\binom{k}{j}$ maneiras; por outro lado, a restrição de f ao subconjunto de I_k formado pelos inteiros que não são seus pontos fixos forma, claramente, uma permutação caótica de I_{k-j}. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, temos

$$|\mathcal{F}_j| = \binom{k}{j}d_{k-j} = \binom{k}{k-j}d_{k-j}.$$

Por fim, segue de (2.10) que

$$|\mathcal{P}_k| = \sum_{j=0}^{k}|\mathcal{F}_j| = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{k-j}d_{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d_j,$$

e basta comparar as duas expressões acima obtidas para $|\mathcal{P}_k|$ para obter (2.9).

Para o que falta, aplicando o lema anterior à igualdade (2.9) (com $a_k = k!$ e $b_k = d_k$), obtemos

$$\begin{aligned} d_k &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\binom{k}{j}j! = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k+j}\frac{k!}{(k-j)!} \\ &= k!\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} = k!\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{j!}. \end{aligned}$$

□

Problemas – Seção 2.2

1. * Dados $n \in \mathbb{N}$ e, para $0 \leq i, j \leq n$, um conjunto a_{ij} de números reais, mostre que

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_{ij} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij}.$$

2. Prove, por argumentos de contagem dupla, que, para todo inteiro positivo n, tem-se

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

3. Prove a **identidade de Vandermonde**[2]: para $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{k} \binom{m}{k} \binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p},$$

onde a soma do primeiro membro acima se estende a todos os valores inteiros e não negativos possíveis de k.

4. Para cada $n > 1$ inteiro, prove que o número de subconjuntos de I_{2n} com quantidades iguais de elementos pares e ímpares é igual a $\binom{2n}{n}$.

5. Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas as patrulhas eram formadas por um mesmo número de homens. Por outro lado, cada homem participava de exatamente duas patrulhas e cada duas patrulhas tinham exatamente um homem em comum. Calcule o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

[2]Após o matemático francês do século XVIII Alexandre-Theóphile Vandermonde.

Para o próximo problema, recorde que um ponto fixo de uma permutação $(a_1, \ldots, a_n)$ de I_n é um inteiro $1 \leq k \leq n$ tal que $a_k = k$.

6. (IMO.) Para $n, k \in \mathbb{N}$, denote por $p_n(k)$ o número de permutações de I_n com exatamente k pontos fixos. Prove que $\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$.

7. (Torneio das Cidades.) O conjunto dos naturais é particionado em m progressões aritméticas infinitas e não constantes, de razões d_1, d_2, ..., d_m. Prove que

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_m} = 1.$$

O resultado do problema a seguir é conhecido como o **lema de Sperner**, em homenagem ao matemático alemão do século XX Emanuel Sperner.

8. Um triângulo ABC é particionado em um número finito de triângulos menores, de tal modo que dois desses triângulos menores ou são disjuntos ou têm exatamente um vértice comum ou exatamente um lado comum. Essa partição gera um certo número de pontos no interior ou sobre os lados do triângulo ABC, os quais são vértices dos triângulos menores. Rotule aleatoriamente os pontos sobre o lado AB (diferentes de A e de B) de A ou B, os pontos sobre o lado AC (diferentes de A e de C) de A ou C e os pontos sobre o lado BC (diferentes de B e de C) de B ou C. Em seguida, rotule cada um dos pontos restantes de A, B ou C, também aleatoriamente. Prove que sempre teremos pelo menos um triângulo menor rotulado ABC.

9. (Rússia.) Em um senado há 30 senadores, sendo cada dois deles amigos ou inimigos. Sabe-se ainda que cada senador tem exatamente seis inimigos. Se cada três senadores formarem uma

comissão, calcule o número de comissões tais que seus membros sejam dois a dois amigos ou dois a dois inimigos.

10. Considere, no plano, um polígono convexo de n lados. Prove que é possível escolher $n-2$ pontos no plano tais que qualquer triângulo formado por vértices do polígono tenha exatamente um dos pontos escolhidos em seu interior.

2.3 Relações de equivalência e contagem

Nesta seção, consideramos certos tipos de relações, ditas *de equivalência*, como ferramentas de contagem. Para formalizar os conceitos preliminares necessários, suponhamos fixado um conjunto não vazio A; dizemos que uma relação $\mathcal{R}$ em A é **reflexiva** se $a\mathcal{R}a$, para todo $a \in A$; **simétrica** se, para todos $a, b \in A$, $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$; **transitiva** se, para todos $a, b, c \in A$, $a\mathcal{R}b$ e $b\mathcal{R}c$ implicam $a\mathcal{R}c$. Por fim, uma **relação de equivalência** em A é uma relação $\mathcal{R}$ em A que é simultaneamente reflexiva, simétrica e transitiva. Em Matemática, é costumeiro denotar relações de equivalência por $\sim$, em vez de $\mathcal{R}$ (i.e., escrevendo $a \sim b$ em vez de $a\mathcal{R}b$); doravante, nos ateremos a tal costume sem maiores comentários.

Exemplos 2.14.

(a) *Seja $\mathcal{F}$ uma partição de um conjunto não vazio A. A relação $\sim$ em A, definida por*

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{F};\ a, b \in B,$$

é de equivalência. Dizemos que tal relação de equivalência é **induzida** *pela partição $\mathcal{F}$.*

(b) *Sejam A e B conjuntos não vazios e $f: A \to B$ uma função. A relação $\sim$ em A, definida por*

$$a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

é de equivalência. Dizemos que tal relação de equivalência é **induzida** *pela função f.*

A definição a seguir é central para o restante desta seção.

Definição 2.15. *Seja A um conjunto não vazio e $\sim$ uma relação de equivalência em A. Para $a \in A$, a* **classe de equivalência** *de a é o subconjunto $\overline{a}$ de A definido por*

$$\overline{a} = \{x \in A;\ x \sim a\}. \tag{2.11}$$

Se $\sim$ é uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A e $a \in A$, então a classe de equivalência $\overline{a}$ é claramente não vazia, uma vez que $a \in \overline{a}$. Nosso primeiro resultado versa sobre as classes de equivalência de uma relação de equivalência genérica, e é o objeto da proposição a seguir.

Proposição 2.16. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Para $a, b \in A$, tem-se*

$$a \sim b \Leftrightarrow \overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{b}.$$

Em particular, as classes de equivalência de $\sim$ formam uma partição de A.

Prova. Mostremos que $a \sim b \Rightarrow \overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset \Rightarrow \overline{a} = \overline{b} \Rightarrow a \sim b$:

- Se $a \sim b$, então $a \in \overline{b}$ e, daí, $a \in \overline{a} \cap \overline{b}$; logo, $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$.
- Se $c \in \overline{a} \cap \overline{b}$ (i.e., se $\overline{a} \cap \overline{b} \neq \emptyset$), então $c \sim a$ e $c \sim b$; portanto, a simetria de $\sim$ garante que $a \sim c$ e $c \sim b$ e, daí, sua transitividade implica $a \sim b$. Mostremos agora que $\overline{a} \subset \overline{b}$ (a inclusão contrária é análoga): se $x \in \overline{a}$, então $x \sim a$; mas, como $a \sim b$, segue novamente da transitividade de $\sim$ que $x \sim b$, i.e., $x \in \overline{b}$.
- Se $\overline{a} = \overline{b}$, então $a \in \overline{a}$ implica $a \in \overline{b}$. Mas isso é o mesmo que $a \sim b$.

□

Se $\sim$ é uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A, segue imediatamente da proposição anterior que a família $A/\sim$, definida por

$$A/\sim = \{\overline{a};\ a \in A\} \tag{2.12}$$

(i.e., a família das classes de equivalência dos elementos de A em relação a $\sim$), é uma partição de A. Tal família é denominada o **conjunto quociente** de A por $\sim$, e a função

$$\begin{array}{rccc} \pi: & A & \longrightarrow & A/\sim \\ & a & \longmapsto & \overline{a} \end{array} \tag{2.13}$$

é a **função projeção** de A sobre $A/\sim$.

Dada uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto não vazio A, um subconjunto B de A é um **sistema de representantes distintos** (abreviamos **SRD**) para $\sim$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

(a) Para todos $a, b \in B$, tem-se $a = b$ ou $a \not\sim b$.

(b) Para todo $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $a \sim b$.

Em palavras, um SRD para a relação de equivalência $\sim$ em A é um subconjunto de A formado por elementos dois a dois não relacionados e tais que todo elemento de A é relacionado a exatamente um deles. De outro modo, se B é um SRD para a relação de equivalência $\sim$ em A, então

$$A/\sim = \{\overline{x};\ x \in B\}. \tag{2.14}$$

A proposição a seguir nos dá uma maneira de construir SRD's para relações de equivalência.

Proposição 2.17. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em um conjunto não vazio A. Se $f: A/\sim \,\rightarrow A$ é uma função tal que $f(\overline{a}) \in \overline{a}$ para todo $a \in A$, então $\mathrm{Im}\,(f)$ é um SRD para $\sim$.*

Prova. Seja $B = \mathrm{Im}\, f$. Se $a, b \in B$, digamos $a = f(\overline{\alpha})$ e $b = f(\overline{\beta})$, com $\alpha, \beta \in A$, então a hipótese sobre f garante que $a \in \overline{\alpha}$ e $b \in \overline{\beta}$. Se $a \sim b$, então, uma vez que $\alpha \sim a$ e $b \sim \beta$, temos por transitividade que $\alpha \sim \beta$; assim, $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ e, daí,

$$a = f(\overline{\alpha}) = f(\overline{\beta}) = b.$$

Para verificar a validade da segunda condição da definição de SRD, tome $a \in A$ e seja $b = f(\overline{a})$. Então $b \in \mathrm{Im}\,(f)$ e a definição de f garante que $b \in \overline{a}$, i.e., que $a \sim b$. □

Nas notações da proposição acima, dizemos que f é uma **função-escolha** para a relação de equivalência $\sim$. Em palavras, o papel de f é escolher um elemento de cada classe de equivalência em $A/\sim$.

No que concerne problemas de contagem, chegamos finalmente ao resultado de maior interesse sobre relações de equivalência.

Proposição 2.18. *Seja $\sim$ uma relação de equivalência em um conjunto finito e não vazio A. Se todas as classes de equivalência de A em relação a $\sim$ têm um mesmo número k de elementos, então há exatamente $|A|/k$ classes de equivalência distintas.*

Prova. Se $\{a_1, \ldots, a_m\}$ é um SRD em relação a $\sim$, então $A = \bigcup_{j=1}^{m} \overline{a}_j$, uma reunião disjunta. Portanto,

$$|A| = \sum_{j=1}^{m} |\overline{a}_j| = \sum_{j=1}^{m} k = km,$$

de maneira que $m = |A|/k$. □

Como primeiro exemplo de aplicação da proposição acima, vamos reobter a fórmula para o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto A com n elementos (o argumento a seguir é uma ligeira variação do exemplo 2.8, sendo a maior mudança envolvida a de ponto

de vista). Para tanto, seja $1 \leq k \leq n$ e $S_k(A)$ o conjunto das sequências de k termos distintos, todos pertencentes a A. Já sabemos que

$$|S_k(A)| = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Defina em $S_k(A)$ a relação $\sim$ por

$$(a_1, \dots, a_k) \sim (b_1, \dots, b_k) \Leftrightarrow \{a_1, \dots, a_k\} = \{b_1, \dots, b_k\}. \quad (2.15)$$

É imediato verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em $S_k(A)$, tal que a classe de equivalência de uma sequência $(a_1, \dots, a_k)$ é o conjunto de todas as suas permutações. Portanto, tal classe de equivalência tem exatamente $k!$ elementos, e segue da proposição 2.18 que o número de classes de equivalência distintas é igual a

$$\frac{|S_k(A)|}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Note por fim que, por (2.15), podemos identificar as classes de equivalência com os subconjuntos de k elementos de A, de maneira que há exatamente $\binom{n}{k}$ de tais subconjuntos.

Uma outra situação de interesse é a seguinte: no conjunto $S(A)$ das permutações de um conjunto finito e não vazio A, definimos uma relação $\sim$ do seguinte modo:

$$(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n)$$

$$\Updownarrow \quad (2.16)$$

$$\exists\, 1 \leq k \leq n;\ b_j = \begin{cases} a_{j+k}, & \text{se } 1 \leq j \leq n-k \\ a_{j+k-n}, & \text{se } n-k < j \leq n \end{cases}.$$

Em outras palavras, $(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n)$ significa que, para algum $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$(b_1, \dots, b_n) = (a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1, \dots, a_k).$$

É imediato verificar que $\sim$ é uma relação de equivalência em $S(A)$. Ademais, para cada sequência $(a_1, \dots, a_n) \in S(A)$, a classe de equivalência $\overline{(a_1, \dots, a_n)}$ contém exatamente n sequências; mais precisamente,

$$\overline{(a_1, \dots, a_n)} = \{(a_1, a_2 \dots, a_{n-1}, a_n), (a_2, a_3, \dots, a_n, a_1)$$
$$(a_3, \dots, a_n, a_1, a_2), \dots, (a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})\}.$$

A classe de equivalência de uma sequência $(a_1, \dots, a_n)$, pela relação de equivalência descrita acima, é denominada a **permutação circular** da sequência $(a_1, \dots, a_n)$. Em particular, segue da discussão geral de relações de equivalência que todas as sequências

$$(a_1, a_2 \dots, a_{n-1}, a_n), (a_2, a_3, \dots, a_n, a_1), \dots, (a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

definem uma mesma permutação circular.

De posse do conceito de permutação circular, temos o seguinte resultado.

Proposição 2.19. *O número de permutações circulares de um conjunto com n elementos é $(n-1)!$.*

Prova. Se A é um conjunto com n elementos, queremos contar quantas são as classes de equivalência de $S(A)$ pela relação de equivalência descrita anteriormente. Como $|S(A)| = n!$ e cada classe de equivalência tem exatamente n elementos, segue da proposição 2.18 que há precisamente $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ classes de equivalência (i.e., permutações circulares) distintas. □

Para o próximo resultado, se A e B são subconjuntos de um mesmo conjunto, dizemos que A e B são **incomparáveis em relação à inclusão** se $A \not\subset B$ e $B \not\subset A$. O teorema a seguir traz uma aplicação mais profunda das ideias acima, devida ao matemático húngaro Béla Bollobás e conhecida na literatura como o **teorema de Bollobás**.

Teorema 2.20 (Bollobás). *Se $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de I_n, dois a dois incomparáveis em relação à inclusão, então*

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \binom{n}{|A|}^{-1} \leq 1.$$

Prova. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das permutações $(a_1, \ldots, a_n)$ de I_n tais que, para algum $1 \leq k \leq n$, tenhamos $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \mathcal{F}$. Sendo um conjunto de permutações de I_n, é imediato que $|\mathcal{P}| \leq n!$.

Consideremos em $\mathcal{P}$ a relação $\sim$, definida por

$$(a_1, \ldots, a_n) \sim (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\} \in \mathcal{F},$$

para algum $1 \leq k \leq n$. Afirmamos que $\sim$ é de equivalência. De fato, é evidente que $\sim$ é reflexiva e simétrica. Para mostrarmos que $\sim$ é transitiva, tome uma terceira permutação $(c_1, \ldots, c_n)$ em $\mathcal{P}$ e suponha que $\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\} \in \mathcal{F}$ e $\{b_1, \ldots, b_l\} = \{c_1, \ldots, c_l\} \in \mathcal{F}$, para certos $1 \leq k, l \leq n$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $k \leq l$; mas, se $k < l$, então

$$\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\} \subset \{b_1, \ldots, b_l\} = \{c_1, \ldots, c_l\} \in \mathcal{F},$$

inclusão estrita, contradizendo o fato de os conjuntos em $\mathcal{F}$ serem dois a dois incomparáveis em relação à inclusão. Logo, $k = l$ e, assim,

$$\{a_1, \ldots, a_k\} = \{b_1, \ldots, b_k\} = \{c_1, \ldots, c_k\} \in \mathcal{F},$$

i.e., $(a_1, \ldots, a_n) \sim (c_1, \ldots, c_n)$.

Agora, fixada uma permutação $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$, com $\{a_1, \ldots, a_k\} = A \in \mathcal{F}$, temos $(b_1, \ldots, b_n) \sim (a_1, \ldots, a_n)$ se, e só se, $\{b_1, \ldots, b_k\} = A$, i.e., se, e só se, $(b_1, \ldots, b_k)$ for uma permutação dos elementos de A (e, portanto, $(b_{k+1}, \ldots, b_n)$ for uma permutação dos elementos de $I_n \setminus A$); como podemos permutar os elementos de A e $I_n \setminus A$ respectivamente de $|A|!$ e $(n - |A|)!$ maneiras, segue que há exatamente $|A|!(n - |A|)!$ permutações $(b_1, \ldots, b_n)$ equivalentes à permutação $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$ fixada. De outro modo, se A é o conjunto em $\mathcal{F}$ associado a $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$, então a classe de equivalência de $(a_1, \ldots, a_n)$ em $\mathcal{P}$ contém exatamente $|A|!(n - |A|)!$ permutações.

Por fim, pela proposição 2.16, o conjunto $\mathcal{P}/\sim$ das classes de equivalência de $\mathcal{P}$ em relação a $\sim$ forma uma partição de $\mathcal{P}$. Mas, como classes de equivalência distintas estão associadas a conjuntos $A \in \mathcal{F}$ distintos e todo conjunto $A \in \mathcal{F}$ dá origem a uma classe de equivalência, segue que

$$n! \geq |\mathcal{P}| = \sum_{\overline{(a_1,\ldots,a_n)}\in\mathcal{P}/\sim} \#\,\overline{(a_1, \ldots, a_n)} = \sum_{A\in\mathcal{F}} |A|!(n - |A|!).$$

De outro modo, temos

$$\sum_{A\in\mathcal{F}} \frac{|A|!(n - |A|!)}{n!} \leq 1,$$

uma desigualdade equivalente à do enunciado. □

Para o próximo exemplo, precisamos introduzir uma classe de exemplos de relações de equivalência, a qual se revelará de suma importância para o material dos capítulos 5, 6 e 7 de [14], quando retomaremos seu estudo de maneira sistemática.

Fixado um inteiro $n > 1$, dizemos que dois inteiros a e b são *congruentes módulo* n se n dividir a diferença $a - b$. Se a e b forem congruentes módulo n, escrevemos $a \equiv b \pmod{n}$; caso contrário, escrevemos $a \not\equiv b \pmod{n}$. Por exemplo, temos $1 \equiv -5 \pmod{3}$, uma vez que $3 \mid (1 - (-5))$, mas $-3 \not\equiv 7 \pmod{4}$, já que $4 \nmid (-3 - 7)$.

Exemplo 2.21. *Fixado $n > 1$ inteiro, a relação $\sim$, definida em $\mathbb{Z}$ por*

$$a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{n},$$

é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, denominada a **relação de congruência módulo n**.

Prova. A reflexividade de $\sim$ segue de que

$$a \sim a \Leftrightarrow a \equiv a \,(\mathrm{mod}\, n) \Leftrightarrow n \mid (a-a),$$

o que é claramente verdadeiro. Por outro lado, como

$$a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \,(\mathrm{mod}\, n) \Leftrightarrow n \mid (a-b),$$

e $n \mid (a-b) \Leftrightarrow n \mid (b-a)$, temos que

$$\begin{aligned} a \sim b &\Rightarrow n \mid (b-a) \Rightarrow n \mid (b-a) \\ &\Rightarrow b \equiv a \,(\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow b \sim a. \end{aligned}$$

Por fim, para a transitividade de $\sim$, se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $n \mid (a-b)$ e $n \mid (b-c)$, i.e., $\frac{a-b}{n}$ e $\frac{b-c}{n}$ são ambos inteiros; portanto, também é inteiro o número

$$\frac{a-c}{n} = \frac{a-b}{n} + \frac{b-c}{n},$$

o que é garante que $n \mid (a-c)$. Mas isso é o mesmo que $a \equiv c \,(\mathrm{mod}\, n)$ ou, ainda, que $a \sim c$. □

Para o exemplo a seguir, dados $m > 1$ inteiro, $A \subset I_m$ e $0 \leq r \leq m-1$, denotemos por $A + r$ o conjunto

$$A + r = \{a + r \,(\mathrm{mod}\, m);\ a \in A\},$$

i.e.,

$$\begin{aligned} A + r &= \{x + r;\ x \in A \text{ e } 1 \leq x \leq m - r\} \cup \\ &\cup \{x + r - m;\ x \in A \text{ e } m - r < x \leq m\}. \end{aligned}$$

Por exemplo, se $m = 7$, $A = \{1, 3, 5\}$ e $r = 4$, então

$$A + r = \{1 + 4, 3 + 4, 5 + 4 \,(\mathrm{mod}\, 7)\} = \{5, 7, 2\}.$$

Exemplo 2.22 (Áustria-Polônia). *Sejam k e n naturais dados, tais que $3 \nmid k$ e $1 \leq k \leq 3n$. Prove que o conjunto I_{3n} tem exatamente $\frac{1}{3}\binom{3n}{k}$ subconjuntos de k elementos, tais que a soma de seus elementos seja um múltiplo de 3.*

Solução. Seja $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos de k elementos do conjunto I_{3n}. Defina uma relação $\sim$ em $\mathcal{F}$ pondo $A \sim B$ se, e só se, existir $0 \leq j \leq 2$ tal que $B = A + j$ módulo 3. É imediato verificar (cf. problema 2) que $\sim$ é uma relação de equivalência e que a classe de equivalência de A contém exatamente os três conjuntos A, $A+1$ e $A+2$ (esses dois últimos módulo 3).

Por outro lado, sendo $S = \sum_{x \in A} x$, temos que

$$\sum_{x \in A+1} x \equiv S + k \,(\mathrm{mod}\, 3) \quad \text{e} \quad \sum_{x \in A+2} x \equiv S + 2k \,(\mathrm{mod}\, 3).$$

Agora, como $k \nmid 3$, temos que S, $S+k$ e $S+2k$ são dois a dois incongruentes, módulo 3, de sorte que exatamente um dentre os conjuntos A, $A+1$ e $A+2$ tem soma dos elementos igual a um múltiplo de 3. Portanto, há tantos subconjuntos de I_{3n} com k elementos e tais que a soma dos mesmos é um múltiplo de 3 quantas forem as classes de equivalência de $\mathcal{F}$ em relação a $\sim$. Mas, uma vez que cada classe de equivalência contém três elementos, a proposição 2.18 garante que há exatamente $\frac{1}{3}\binom{3n}{k}$ classes distintas. □

Problemas – Seção 2.3

1. Em cada um dos itens do exemplo 2.14, prove que as relações dadas são realmente de equivalência e identifique as classes de equivalência correspondentes.

2. * Dados $k, m \in \mathbb{N}$, defina uma relação $\sim$ na família dos subconjuntos de k elementos do conjunto I_m pondo $A \sim B$ se, e só se, existir $0 \le j \le 2$ tal que $B = A + j$ módulo 3. Prove que $\sim$ é uma relação de equivalência.

3. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, com $1 \le k \le n$, sejam $S(n,k)$ o número de Stirling de segundo tipo correspondente (cf. problema 7, página 28) e A um conjunto finito, com n elementos. Faça os seguintes itens:

   (a) Mostre que toda relação de equivalência em A, com exatamente k classes de equivalência, pode ser obtida a partir de uma função sobrejetiva $f : A \to B$, com $|B| = k$, conforme prescrito pelo item (b) do exemplo 2.14.

   (b) Mostre que o número de relações de equivalência em A, com exatamente k classes de equivalência, é igual a $S(n,k)$.

   (c) Conclua, a partir dos itens anteriores, que

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

4. Mostre que o número de maneiras de particionar um conjunto de ab elementos em a conjuntos de b elementos cada é $\frac{(ab)!}{a!(b!)^a}$.

5. São dados um número primo p e m cores distintas. Prove que há exatamente $\frac{m^p - m}{p} + m$ colares distintos, cada um formado por p contas, sendo cada uma delas pintada com uma das m cores dadas (pode haver contas de cores repetidas). Em seguida, use esse resultado para mostrar o **pequeno teorema de Fermat**[3]: se p é primo e m é um natural não divisível por p, então $m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

[3]Após Pierre de Fermat, matemático francês do século XVII. Para mais sobre esse resultado, sugerimos ao leitor a referência [14].

6. Dado $n \in \mathbb{N}$, dizemos que uma sequência $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, tal que $x_j \in \{0,1\}$ para $1 \le j \le n$, é *aperiódica* se não existir divisor positivo d de n tal que a sequência seja formada pela justaposição de $\frac{n}{d}$ cópias do bloco $(x_1, \ldots, x_d)$. Se a_n denota o número de sequências aperiódicas de tamanho n, prove que $n \mid a_n$.

7. Prove o seguinte teorema de Sperner: se $\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de I_n, dois a dois incomparáveis em relação à inclusão, então

$$|\mathcal{F}| \le \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

ocorrendo a igualdade se $\mathcal{F} = \{A \subset I_n;\ |A| = \lfloor n/2 \rfloor\}$.

Para o problema a seguir, recorde que uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de I_n é um *sistema intersectante* se, para todos $A, B \in \mathcal{F}$, tivermos $A \cap B \neq \emptyset$.

8. O objetivo deste problema é provar o **teorema de Erdös-Ko-Rado**[4]: para k e n inteiros positivos, com $1 \le k \le n$, se $\mathcal{F}$ é um sistema intersectante de subconjuntos de k elementos de I_n, então

$$|\mathcal{F}| \le \begin{cases} \binom{n}{k}, & \text{se } k > n/2 \\ \binom{n-1}{k-1}, & \text{se } k \le n/2 \end{cases}.$$

Para tanto, faça os seguintes itens:

   (a) Se $k > \frac{n}{2}$, mostre que $|\mathcal{F}| \le \binom{n}{k}$.

   (b) Se $k \le \frac{n}{2}$, dê exemplo de um sistema intersectante $\mathcal{F}$, formado por subconjuntos de k elementos de I_n e tal que $|\mathcal{F}| = \binom{n-1}{k-1}$.

[4]Após os matemáticos do século XX Paul Erdös, Chao Ko e Richard Rado.

(c) Ainda no caso $k \leq \frac{n}{2}$, fixe um sistema intersectante arbitrário $\mathcal{F}$, formado por subconjuntos de k elementos de I_n. Denote por S_n o conjunto das permutações $\sigma : I_n \to I_n$, e por C_n o conjunto das permutações circulares de I_n, de forma que $|S_n| = n!$, $|C_n| = (n-1)!$ e, para $\sigma \in S_n$, temos $\overline{\sigma} \in C_n$, com $|\overline{\sigma}| = n$. Defina $A \in \mathcal{F}$ e $\overline{\sigma} \in C_n$ como *compatíveis* se, para alguma permutação $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in \overline{\sigma}$, tivermos $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$.

i. Para $\sigma \in S_n$, mostre que há no máximo k conjuntos em $\mathcal{F}$ compatíveis com $\overline{\sigma}$. Conclua, a partir daí, que o número de pares $(A, \overline{\sigma})$ tais que $A \in \mathcal{F}$, $\sigma \in S_n$ e A e $\overline{\sigma}$ são compatíveis é no máximo $(n-1)!k$.

ii. Fixado $A \in \mathcal{F}$, mostre que há exatamente $k!(n-k)!$ elementos $\overline{\sigma} \in C_n$ tais que A e $\overline{\sigma}$ são compatíveis. A partir daí, conclua que o número de pares $(A, \overline{\sigma})$ tais que $A \in \mathcal{F}$, $\sigma \in S_n$ e A e $\overline{\sigma}$ são compatíveis é igual a $k!(n-k)!|\mathcal{F}|$.

iii. Complete a prova do teorema de Erdös-Ko-Rado.

2.4 Contando com métricas

Nesta seção, apresentamos uma técnica de contagem com flagrante sabor geométrico, para o quê precisamos da seguinte definição, a qual é central em Matemática.

Definição 2.23. *Se X é um conjunto não vazio, uma* **métrica** *em X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ satisfazendo, para todos $x, y, z \in X$, as seguintes propriedades:*

(a) $d(x, y) = d(y, x)$.

(b) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O protótipo de métrica é a distância no espaço Euclidiano. Mais precisamente, se E^3 denota o espaço Euclidiano tridimensional e $d : E^3 \times E^3 \to \mathbb{R}$ é tal que

$$d(P, Q) = \overline{PQ}, \ \forall \ P, Q \in E^3,$$

então as condições (a), (b) e (c) acima são certamente satisfeitas, a condição (c) decorrendo da desigualdade triangular.

Graças ao exemplo acima, doravante nos referiremos à condição (c) na definição 2.23 como a **desigualdade triangular**. Outra nomenclatura emprestada do exemplo acima é isolada na próxima definição.

Definição 2.24. *Seja d uma métrica no conjunto não vazio X. Dados $x \in X$ e $r > 0$, a* **bola**[5] *de* **centro** *x e* **raio** *r é o subconjunto $B(x; r)$ de X, dado por*

$$B(x; r) = \{y \in X;\ d(y, x) \leq r\}.$$

À guisa de ilustração, no exemplo anterior, fixados $P \in E^3$ e $r > 0$ temos

$$\begin{aligned} B(P; r) &= \{Q \in E^3;\ \overline{PQ} \leq r\} \\ &= \text{bola de centro } P \text{ e raio } r, \end{aligned}$$

corroborando a noção geométrica intuitiva atrelada ao nome *bola*.

Nosso interesse primordial, no que concerne a Combinatória, é em métricas definidas em conjuntos não vazios e finitos. Para entender o porquê de um tal interesse, suponhamos por um momento que X seja um conjunto não vazio finito e d seja uma métrica em X. Suponhamos,

[5] O leitor com alguma experiência na teoria de espaços métricos deve ter observado que o que chamamos aqui de bola é conhecido na literatura em geral como uma *bola fechada*. Do nosso ponto de vista, a adoção de uma nomenclatura ligeiramente diferente facilita o discurso e não causará prejuízo.

ainda, que $x_1, \ldots, x_k \in X$ sejam tais que a união das bolas de um certo raio r e centradas em tais pontos *cubra* X, i.e., que

$$B(x_1; r) \cup \ldots \cup B(x_k; r) = X. \tag{2.17}$$

Se tivermos uma estimativa superior para o número de elementos de uma bola qualquer de raio r em X, digamos

$$|B(x; r)| \leq c(r), \ \forall \ x \in X,$$

onde $c(r)$ é uma constante que só depende de r (e não do $x \in X$ escolhido), então (2.17) permite escrever

$$\begin{aligned} |X| &= |B(x_1; r) \cup \ldots \cup B(x_k; r)| \\ &\leq |B(x_1; r)| + \cdots + |B(x_k; r)| \\ &\leq k \cdot c(r), \end{aligned}$$

de sorte que

$$k \geq \frac{1}{c(r)}|X|. \tag{2.18}$$

Assim, uma estimativa *superior* para o número de elementos de uma bola de raio r acarreta uma estimativa *inferior* para o número de bolas de raio r necessárias para cobrir X.

De posse do programa geral delineado acima, vejamos um primeiro exemplo relevante.

Exemplo 2.25. *Dado $n \in \mathbb{N}$, seja $\mathcal{S}_n$ o conjunto das sequências de tamanho n e formadas por 0's e 1's, i.e.,*

$$\mathcal{S}_n = \{a = (a_1, a_2, \ldots, a_n);\ a_i = 0 \ \mathit{ou}\ 1,\ \forall\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Se $d : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathbb{R}$ é a função dada, para $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ em $\mathcal{S}_n$, por

$$d(a, b) = \#\{1 \leq i \leq n;\ a_i \neq b_i\},$$

então d é uma métrica em $\mathcal{S}_n$, denominada a **métrica de Hamming**[6] *de $\mathcal{S}_n$.*

Prova. Temos claramente $d(a, b) \geq 0$ e $d(a, b) = 0$ se, e só se, $a = b$. Também é claro que $d(a, b) = d(b, a)$. Para verificar a desigualdade triangular, observe que, se $a, b \in \mathcal{S}_n$, então

$$d(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|.$$

Portanto, para $a, b, c \in \mathcal{S}_n$, segue da desigualdade triangular para números reais que

$$\begin{aligned} d(a, c) &= \sum_{i=1}^{n} |a_i - c_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|a_i - b_i| + |b_i - c_i|) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i - c_i| \\ &= d(a, b) + d(b, c). \end{aligned}$$

□

Nas notações do exemplo acima, fixados $a \in \mathcal{S}_n$ e $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} B(a; k) &= \{b \in \mathcal{S}_n;\ d(a, b) \leq k\} \\ &= \{b \in \mathcal{S}_n;\ a_i \neq b_i \text{ para no máximo } k \text{ índices } 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

Mas, como há exatamente $\binom{n}{j}$ modos de escolhermos j índices $1 \leq i \leq n$ nos quais as sequências a e b difiram, concluímos que

$$|B(a; k)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}. \tag{2.19}$$

Portanto, a discussão que precede o exemplo anterior fornece o próximo exemplo.

[6] Após o matemático americano do século XX Richard Hamming, que criou tal conceito para estudar problemas de codificação (criando os hoje famosos códigos de Hamming) em Ciência da Computação e Engenharia de Telecomunicações.

Exemplo 2.26. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{S}_n$ o conjunto das sequências de tamanho n e formadas por 0's e 1's. Mostre que, ao escolhermos aleatoriamente menos de*

$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}}$$

sequências em $\mathcal{S}_n$, sempre existirá pelo menos uma sequência em $\mathcal{S}_n$ que difere de todas as sequências escolhidas em pelo menos $k+1$ posições distintas.

Prova. Se $x_1, \ldots, x_l$ são l sequências distintas quaisquer em $\mathcal{S}_n$, com

$$l < \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}},$$

então (2.19) e cálculos análogos aos que levaram a (2.18) fornecem

$$\begin{aligned}|B(x_1;k) \cup \ldots \cup B(x_l;k)| &\leq |B(x_1;k)| + \cdots + |B(x_l;k)| \\ &= \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k}\right) l < 2^n.\end{aligned}$$

Mas, como $|\mathcal{S}_n| = 2^n$, concluímos, a partir da desigualdade acima, que a união de bolas $B(x_1;k) \cup \ldots \cup B(x_l;k)$ não cobre $\mathcal{S}_n$. Portanto, existe pelo menos uma sequência $x \in \mathcal{S}_n$ tal que $x \notin B(x_i;k)$, para $1 \leq i \leq l$, o que é o mesmo que

$$d(x, x_i) > k, \ \forall\, 1 \leq i \leq l.$$

O resto segue da definição da métrica de Hamming. □

Para nosso próximo exemplo, recorde que, sendo X e Y dois conjuntos, sua **diferença simétrica** é o conjunto $X \Delta Y$, dado por

$$X \Delta Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y).$$

Em palavras, $X \Delta Y$ é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *exatamente um* dos conjuntos X e Y.

Segue prontamente da definição que $X \Delta \emptyset = X$ e $X \Delta Y = Y \Delta X$; ademais, o leitor também pode verificar facilmente que

$$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X),$$

para todos os conjuntos X e Y.

Reunimos, no lema a seguir, as propriedades da diferença simétrica de conjuntos que serão de nosso interesse.

Lema 2.27. *Se X, Y e Z são conjuntos quaisquer, então:*

(a) $X \Delta Y = \emptyset \Leftrightarrow X = Y$.

(b) $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$.

(c) $X \Delta Y = Z \Leftrightarrow X = Y \Delta Z$.

Prova.
(a) Como temos claramente $X \Delta X = \emptyset$, basta provar que $X \Delta Y = \emptyset \Rightarrow X = Y$. Para tanto, observe que $X \Delta Y = \emptyset \Rightarrow X \cup Y = X \cap Y$ e, daí,

$$X \subset X \cup Y = X \cap Y \subset Y;$$

analogamente, $Y \subset X$.

(b) Não é difícil verificar que

$$(X \Delta Y) \Delta Z = (X \cup Y \cup Z) \setminus ((X \cap Y) \cup (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)),$$

e analogamente para $X \Delta (Y \Delta Z)$. Deixamos a verificação dos detalhes como exercício para o leitor.

(c) Mostremos uma implicação, sendo a prova da outra totalmente análoga. Se $X \Delta Y = Z$, segue do item (b) que

$$X = \emptyset \Delta X = (Y \Delta Y) \Delta X = Y \Delta (Y \Delta X) = Y \Delta Z.$$

□

De posse dos fatos acima, podemos apresentar uma métrica por vezes útil em famílias de conjuntos finitos, conhecida como a **métrica da diferença simétrica**.

Exemplo 2.28. *Se $\mathcal{F}$ é uma família não vazia de conjuntos finitos, então a função $d : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, dada por $d(X,Y) = |X\Delta Y|$, é uma métrica em $\mathcal{F}$.*

Prova. Uma vez que $X\Delta Y = Y\Delta X$, temos

$$d(X,Y) = |X\Delta Y| = |Y\Delta X| = d(Y,X),$$

para todos $X, Y \in \mathcal{F}$. Também é claro que $d(X,Y) \geq 0$ e que $d(X,Y) = 0$ se, e só se, $X\Delta Y = \emptyset$; mas, pelo item (a) do lema anterior, essa última igualdade ocorre se, e só se, $X = Y$.

Resta mostrarmos que $d(X,Y) \leq d(X,Z) + d(Z,Y)$, para todos $X, Y, Z \in \mathcal{F}$, ou, o que é o mesmo, que $|X\Delta Y| \leq |X\Delta Z| + |Z\Delta Y|$. Para tanto, como $|A \cup B| \leq |A| + |B|$, para A e B conjuntos finitos, é suficiente mostrarmos a inclusão

$$X\Delta Y \subset (X\Delta Z) \cup (Z\Delta Y).$$

Tal inclusão, por sua vez, segue imediatamente da igualdade

$$(X\Delta Z) \cup (Z\Delta Y) = (X \cup Y \cup Z) \setminus (X \cap Y \cap Z),$$

cuja demonstração deixamos a cargo do leitor. □

Fixado $m \in \mathbb{N}$, consideremos a métrica da diferença simétrica em $\mathcal{F} = \mathcal{P}(m)$, a família das partes de I_m. Se $X \subset I_m$ é um conjunto dado, calculemos o número de elementos da bola $B(X;k)$, onde $k \geq 0$ é um inteiro fixado. Para tanto, observe inicialmente que

$$Y \in B(X;k) \Leftrightarrow |X\Delta Y| \leq k;$$

portanto, para contar o número de elementos de $B(X;k)$, basta contarmos quantos são os $Y \subset I_m$ tais que $|X\Delta Y| \leq k$. Mas, fixado $Z \subset I_m$, o item (c) do lema 2.27 garante a existência de um único $Y \subset I_m$ tal que $Z = X\Delta Y$. Logo,

$$\{Y \in \mathcal{P}(m);\ |X\Delta Y| \leq k\} = \{Z \in \mathcal{P}(m);\ |Z| \leq k\}.$$

Por fim, uma vez que, para $0 \leq j \leq k$, há $\binom{m}{j}$ maneiras de escolher $Z \subset I_m$ tal que $|Z| = j$, segue da igualdade acima que

$$\begin{aligned} |B(X;k)| &= \#\{Z \in \mathcal{P}(m);\ |Z| \leq k\} \\ &= \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \cdots + \binom{m}{k}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Para o exemplo a seguir, sejam $\mathcal{P}_k(n)$ a família dos subconjuntos de k elementos de I_n e d a métrica da diferença simétrica em $\mathcal{P}_k(n)$. Para $X, Y \in \mathcal{P}_k(n)$ distintos, temos

$$\begin{aligned} d(X,Y) &= |X\Delta Y| = |X \cup Y| - |X \cap Y| \\ &= |X| + |Y| - 2|X \cap Y| \\ &= 2(k - |X \cap Y|), \end{aligned} \tag{2.21}$$

um número par.

Exemplo 2.29 (BMO - adaptado). *Sejam $n > 2$ inteiro e $\mathcal{F}$ uma família maximal de subconjuntos de três elementos do conjunto I_n satisfazendo a seguinte condição: para todos $A, B \in \mathcal{F}$, com $A \neq B$, temos que $|A \cap B| \leq 1$. Prove que*

$$|\mathcal{F}| > \frac{1}{18}(n^2 - n).$$

Prova. Seja d a métrica da diferença simétrica em $\mathcal{P}_3(n)$. Segue de (2.21) que, para $X, Y \in \mathcal{F}$,

$$|X \cap Y| \leq 1 \Leftrightarrow d(X,Y) \geq 4.$$

Afirmamos agora que, se $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_k\}$, então

$$\mathcal{P}_3(n) = B(A_1; 2) \cup \ldots \cup B(A_k; 2). \tag{2.22}$$

De fato, se esse não fosse o caso, existiria $A \in \mathcal{P}_3(n) \setminus (B(A_1; 2) \cup \ldots \cup B(A_k; 2))$, i.e., tal que $d(A; A_i) \geq 4$, para $1 \leq i \leq k$. Mas, pelo que fizemos acima, isso seria o mesmo que $|A \cap A_i| \leq 1$, para $1 \leq i \leq k$, de sorte que $\mathcal{F}' = \{A, A_1, \ldots, A_k\}$ seria uma família maior que $\mathcal{F}$ e ainda satisfazendo as condições do enunciado, o que é uma contradição.

Portanto, segue de (2.22) que

$$\begin{aligned} \binom{n}{3} &= |\mathcal{P}_3(n)| = |B(A_1; 2) \cup \ldots \cup B(A_k; 2)| \\ &\leq |B(A_1; 2)| + \cdots + |B(A_k; 2)|. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Agora, dado $A = \{a, b, c\} \in \mathcal{P}_3(n)$, calculemos o número de elementos de $B(A; 2) \subset \mathcal{P}_3(n)$: lembre-se de que, para $A' \in \mathcal{P}_3(n)$, a distância $d(A', A)$ é par; assim, (2.21) garante que

$$\begin{aligned} d(A', A) \leq 2 &\Leftrightarrow d(A', A) = 0 \text{ ou } 2 \\ &\Leftrightarrow A' = A \text{ ou } |A' \cap A| = 2 \\ &\Leftrightarrow A' = \{a, b, c\}, \{a, b, x\}, \{a, c, x\} \text{ ou } \{b, c, x\}, \end{aligned}$$

para algum $x \in I_n \setminus \{a, b, c\}$. Logo,

$$|B(A; 2)| = 1 + 3(n - 3) = 3n - 8.$$

Para terminar, segue de (2.23) que

$$\begin{aligned} k &\geq \frac{1}{3n - 8}\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6(3n-8)} \\ &> \frac{n(n-1)(n-2)}{6(3n-6)} \\ &= \frac{n(n-1)}{18}. \end{aligned}$$

□

Problemas – Seção 2.4

1. Prove que a métrica de Hamming é um caso particular da métrica da diferença finita.

2. (Irlanda.) Sejam $n \geq 11$ um inteiro ímpar e $\mathcal{T}$ o conjunto das $n-$uplas $(x_1, \ldots, x_n)$ tais que $x_i \in \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq n$. Para $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ em $\mathcal{T}$, seja
$$f(x, y) = \#\{1 \leq i \leq n;\ x_i \neq y_i\}.$$
Suponha que existe $\mathcal{S} \subset T$ satisfazendo as seguintes condições:
   (a) $|\mathcal{S}| = 2^{\frac{n+1}{2}}$.
   (b) Para todo $x \in \mathcal{T}$, existe um único $y \in \mathcal{S}$ tal que $f(x, y) \leq 3$.

   Prove que $n = 23$.

3. * Para $n > 3$ inteiro, seja $f(n)$ o maior número possível de subconjuntos de quatro elementos do conjunto I_n, tais que dois quaisquer deles têm, no máximo, dois elementos em comum. Prove que
$$\frac{1}{16}\binom{n}{3} < f(n) \leq \frac{1}{3}\binom{n}{3}.$$

4. * Sejam $n \geq 2$ inteiro e $A_1, \ldots, A_k \subset I_n$ tais que, para $1 \leq i < j \leq k$, tenhamos $|A_i \Delta A_j| \geq 2r + 1$, onde r é um inteiro positivo dado. Prove que
$$k \leq \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{r}}.$$

5. (Índia.) A partir de um comitê de n pessoas são formados 1997 subcomitês distintos. Se cada dois desses subcomitês são tais que o número de pessoas participando de exatamente um deles é maior ou igual a cinco, prove que $n \geq 19$.

CAPÍTULO 3

Funções Geradoras

Neste capítulo, discutimos brevemente o poderoso método das *funções geradoras*, o qual se aplica a muitos problemas de contagem inacessíveis pelos métodos discutidos até agora. Diferentemente dos dois capítulos anteriores, o material aqui reunido utiliza fortemente vários argumentos de Cálculo Diferencial e Integral, de sorte que sugerimos ao leitor consultar [10] ou [13] para uma exposição autocontida dos pré-requisitos correspondentes. Entretanto, uma vez que utilizaremos livremente a teoria elementar de funções definidas por séries de potências, delineamos, na seção 3.2, os principais resultados e argumentos que necessitaremos de tal teoria. Por fim, sugerimos ao leitor o clássico [55] para uma exposição abrangente sobre a utilização de funções geradoras em Combinatória.

3.1 Introdução

A **função geradora** (**ordinária**) de uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ de números reais[1] é a série de potências

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Dentre as funções geradoras, a mais simples é, de certo modo, aquela da sequência dos inteiros não negativos: $\sum_{n\geq 0} x^n$, a qual converge para $\frac{1}{1-x}$ quando $|x| < 1$ (cf. exemplo 3.3). Assim, para $|x| < 1$, temos

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n, \tag{3.1}$$

a série de potências do segundo membro acima sendo conhecida como a *série geométrica*.

A fim de ilustrar o tipo de aplicação que temos em mente para tais séries, consideramos, a seguir, dois exemplos preliminares. No primeiro deles, revisitamos o problema 7, página 65, e utilizamos alguns fatos elementares sobre continuidade de funções, os quais podem ser encontrados no capítulo 4 de [13].

Exemplo 3.1 (Torneio das Cidades). *O conjunto dos naturais é particionado em m progressões aritméticas infinitas e não constantes, de razões $d_1, d_2, \ldots, d_m$. Prove que*

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \cdots + \frac{1}{d_m} = 1.$$

Prova. Se $f(x) = \sum_{n\geq 1} x^n$ é a função geradora dos naturais e a_i é o termo inicial da PA de razão d_i, então a condição do enunciado garante que, para $|x| < 1$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} (x^{a_i} + x^{a_i+d_i} + x^{a_i+2d_i} + \cdots).$$

[1]Por vezes, utilizaremos funções geradoras de sequências $(a_n)_{n\geq 1}$, o que não deverá causar confusão ao leitor.

Portanto, para $|x| < 1$, segue de (3.1) (com x^{d_i} no lugar de x, em cada série-parcela do segundo membro) que

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x^{a_i}}{1-x^{d_i}}$$

e, daí, que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \frac{x^{a_i}}{1 + x + x^2 + \cdots + x^{d_i - 1}}. \tag{3.2}$$

Agora, note que ambos os membros da igualdade acima são funções contínuas em $[0,1]$, as quais coincidem em $[0,1)$; portanto, tais funções coincidem também para $x = 1$, de sorte que

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i}.$$

□

O próximo exemplo utiliza funções geradoras para reobter a fórmula posicional para o $n-$ésimo número de Fibonacci.

Exemplo 3.2. *Seja $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci e considere sua função geradora $f(x) = \sum_{n\geq 1} F_n x^n$. Supondo que a série que define f convirja em um intervalo da forma $(-r, r)$, para algum $r > 0$ (veremos, no parágrafo subsequente à proposição 3.8, que esse é realmente o caso), podemos escrever*

$$\begin{aligned}
f(x) &= F_1 x + F_2 x^2 + \sum_{n\geq 3} F_n x^n \\
&= x + x^2 + \sum_{n\geq 3} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= x + x^2 + x \sum_{n\geq 3} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n\geq 3} F_{n-2} x^{n-2} \\
&= x + x^2 + x(f(x) - F_1 x) + x^2 f(x) \\
&= x + (x + x^2) f(x),
\end{aligned}$$

obtendo então

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

para $x \in (-r, r)$.

Agora, escrevendo $1 - x - x^2 = (1 - \alpha x)(1 - \beta x)$, *com* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *temos* $\alpha + \beta = 1$ *e* $\alpha\beta = -1$ *e*

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}.$$

Impondo, sem perda de generalidade, que $\alpha > \beta$, *segue que* $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *e* $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, *de maneira que* $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ *e, portanto,*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1 - \alpha x} - \frac{1}{1 - \beta x}\right).$$

Aplicando o desenvolvimento em série (3.1), com αx *e* βx *no lugar de* x, *obtemos*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\sum_{n\geq 0}(\alpha x)^n - \sum_{n\geq 0}(\beta x)^n\right\} \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n. \end{aligned}$$

Pela discussão no início dessa seção, as séries geométricas envolvidas nos cálculos acima convergem para todo $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|\alpha x|, |\beta x| < 1$, *i.e., para* $|x| < \frac{1}{|\alpha|}$. *Portanto, sendo* $s = \min\left\{r, \frac{1}{|\alpha|}\right\}$, *segue que*

$$\sum_{n\geq 1} F_n x^n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)x^n, \tag{3.3}$$

para $|x| < s$. *Assim, se a série de potências que representa* f *for única, não nos restará outra alternativa senão inferir, a partir da igualdade acima, que*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \tag{3.4}$$

para todo $n \geq 1$, *como, aliás, já sabemos ser o caso.*

Problemas – Seção 3.1

1. Nas notações do exemplo 3.1, se $a_1, a_2, \ldots, a_m$ são os termos iniciais das progressões, prove que

$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_m}{d_m} = \frac{m+1}{2}.$$

3.2 Séries de potências

Para justificar e estender a situações mais complicadas argumentos como os dos dois exemplos discutidos na seção anterior, precisamos de alguns fatos sobre *séries de potências* em geral, os quais são aqui colecionados. A bem da clareza da exposição, omitimos as demonstrações mais delicadas, referindo o leitor a [4], [10], [27] ou [41] para os detalhes.

Dizemos que uma função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, $r > 0$, admite em $(-r, r)$ o desenvolvimento em série de potências

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

ou, ainda, que a série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ **converge** para f em $(-r, r)$, se

$$f(x) = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n x^n,$$

para todo $x \in (-r, r)$. Um exemplo relevante é o da série geométrica, que recordamos a seguir.

Exemplo 3.3. *Para* $|x| < 1$, *temos* $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Como corolário desse exemplo observe que, para $\alpha \neq 0$ dado, temos

$$\frac{1}{1 - \alpha x} = \sum_{n\geq 0} \alpha^n x^n \tag{3.5}$$

quando $|x| < \frac{1}{|\alpha|}$. De fato, se $|x| < \frac{1}{|\alpha|}$, então $|\alpha x| < 1$, de sorte que basta aplicar o resultado do exemplo anterio, com αx no lugar de x.

Por vezes, precisaremos combinar os desenvolvimentos em séries de potências de duas funções para obter o desenvolvimento correspondente de uma outra função, obtida a partir daquelas por intermédio das operações usuais de adição, subtração ou multiplicação de funções. Neste sentido, é imediato, a partir da definição de convergência de uma série de potências, que, se $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $g(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ em $(-r, r)$, então

$$(f \pm g)(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n \pm b_n)x^n$$

em $(-r, r)$. Quanto à multiplicação, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.4. *Se as funções $f, g : (-r, r) \to \mathbb{R}$ têm expansões em séries de potências $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k x^k$ e $g(x) = \sum_{l\geq 0} b_l x^l$, então a função $fg : (-r, r) \to \mathbb{R}$ tem expansão em série de potências $(fg)(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, onde*

$$c_n = \sum_{k+l=n} a_k b_l = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{3.6}$$

Assim, para $|x| < 1$ e fazendo $a_k = 1$ para todo $k \geq 0$, obtemos do exemplo 3.3 que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{k\geq 0} a_k x^k\right)\left(\sum_{l\geq 0} a_l x^l\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)x^n\\ &= \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n.\end{aligned}$$

O principal resultado acerca de séries de potências é dado pelo teorema a seguir. Em particular, tal resultado garante que podemos derivar uma função definida por uma série de potências.

Teorema 3.5. *Se $r > 0$ é tal que a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge para todo $x \in (-r, r)$, então a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ é diferenciável, com $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$, para todo $x \in (-r, r)$.*

Em palavras, o teorema acima garante que podemos *derivar termo a termo* uma série de potências convergente, obtendo como resultado a série correspondente à derivada da função definida pela série original.

Exemplo 3.6. *Vejamos como reobter, por intermédio do resultado anterior, a expansão em série de potências da função $\frac{1}{(1-x)^2}$. Como $\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$ para $|x| < 1$, derivando ambos os membros dessa igualdade, obtemos*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,$$

igualdade válida também para todo $x \in (-1, 1)$.

Um corolário importante do teorema 3.5 é a unicidade da série de potências que representa uma função.

Corolário 3.7. *Se uma função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ admite em $(-r, r)$ uma representação em série de potências, então f é infinitamente derivável e sua representação em série de potências é única e dada por*

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

com $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, onde $f^{(n)}(0)$ denota o valor da $n-$ésima derivada de f em 0.

Prova. Note inicialmente que $f(0) = a_0$. Agora, o teorema anterior nos dá $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ em $(-r, r)$; em particular, segue daí que $f'(0) = a_1$. Novamente pelo teorema anterior, obtemos $f''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$ e, daí, $f''(0) = 2a_2$. Prosseguindo analogamente, concluímos pela validade do corolário. □

A importância do teorema 3.5 só se relevará completamente se dispusermos de um critério que permita estabelecer a convergência de uma série de potências da forma $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ em um intervalo aberto centrado em 0. Para nossos propósitos, o resultado a seguir, caso particular do critério de comparação para séries, será suficiente.

Proposição 3.8. *Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais. Se existirem reais positivos c e M tais que $|a_n| \leq cM^n$ para todo $n \geq 0$, então a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge, para todo $x \in \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$.*

Prova. Como

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq cM^n|x|^n = c|Mx|^n$$

e a série geométrica $\sum_{n\geq 0} |Mx|^n$ converge quando $|x| < \frac{1}{M}$ (cf. discussão subsequente ao exemplo 3.3), o critério de comparação para séries (cf. proposição 3.25 de [13]) garante que a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge quando $|x| < \frac{1}{M}$. □

De posse da proposição acima, podemos completar a análise do exemplo 3.2. De fato, sendo $(F_n)_{n\geq 1}$ a sequência de Fibonacci, uma fácil indução permite estabelecer que $F_n \leq 2^n$, para todo $n \geq 1$. Portanto, pela proposição anterior, a função geradora correspondente, $\sum_{n\geq 1} F_n x^n$, converge sempre que $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Assim, todos os cálculos do exemplo citado são lícitos sempre que $|x| < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{|\alpha|}\right\} = \frac{1}{2}$; em particular, podemos usar o corolário 3.7 para concluir, a partir de (3.3), que (3.4) é verdadeira.

Exemplo 3.9. *Como aplicação relevante da proposição anterior em conjunção com o teorema 3.5, mostremos que*

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Afirmamos inicialmente que, dado $A > 0$, existem $\alpha > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n! > \alpha A^n$, para todo $n > n_0$. De fato, fixado $n_0 > A$ temos, para $n > n_0$, que

$$n! = n_0! \underbrace{(n_0 + 1) \ldots (n-1)n}_{n-n_0} > n_0! A^{n-n_0} = \frac{n_0!}{A^{n_0}} A^n.$$

Basta, pois, tomar $\alpha = \frac{n_0!}{A^{n_0}}$.

Dado $A > 0$, tomemos $\alpha > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ como acima. Fazendo $a_n = \frac{1}{n!}$, $c = \frac{1}{\alpha}$ e $M = \frac{1}{A}$ na proposição anterior, concluímos que $0 < a_n < cM^n$ para $n > n_0$, de maneira que a série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{n_0} \frac{1}{n!} x^n + \sum_{n>n_0} \frac{1}{n!} x^n$$

define uma função derivável $f : (-A, A) \to \mathbb{R}$ (note que $\frac{1}{M} = A$).

Como $A > 0$ foi escolhido arbitrariamente e $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ em cada intervalo $(-A, A)$, concluímos que f está definida e é derivável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, derivando termo a termo a igualdade $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$ (o que é permitido, pelo teorema 3.5), obtemos $f'(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, segue da proposição 6.49 de [13] que $f(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. □

Para uso futuro, observamos que, trocando x por ax na igualdade do exemplo anterior, obtemos

$$e^{ax} = \sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!} x^n, \tag{3.7}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Vamos, agora, aplicar o teorema 3.5 e a proposição 3.8 para desenvolver a função $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \neq 0$, em série de potências quando $|x| < 1$.

Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \geq 0$ inteiro, definimos o **número binomial generalizado** $\binom{\alpha}{n}$ pondo $\binom{\alpha}{0} = 1$ e, para $n \geq 1$,

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}. \tag{3.8}$$

Lema 3.10. *Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, temos:*

(a) $\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}$.

(b) $\frac{n}{\alpha}\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n-1}$, *para todo $\alpha \neq 0$.*

(c) $\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq 1$, *para $|\alpha| \leq 1$.*

Prova.
(a) É um cálculo fácil:

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{n} - \binom{\alpha-1}{n} &= \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) \\ &\quad - \frac{1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n) \\ &= \frac{1}{n!}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-(\alpha-n)) \\ &= \frac{1}{(n-1)!}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1) \\ &= \binom{\alpha-1}{n-1}.\end{aligned}$$

(b) Imediato a partir de (3.8).

(c) Sendo $|\alpha| \leq 1$, segue de (3.8) e da desigualdade triangular que

$$\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)\ldots(|\alpha|+n-1)}{n!} \leq \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n!} = 1.$$

□

O teorema a seguir é conhecido como o desenvolvimento da **série binomial** e é devido a Isaac Newton.

Teorema 3.11 (Newton). *Para $\alpha \neq 0$ e $|x| < 1$, temos*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n. \tag{3.9}$$

Prova. Suponhamos inicialmente que $0 < |\alpha| \leq 1$. Como $\left|\binom{\alpha}{n}x^n\right| \leq |x|^n$ (pelo item (c) do lema anterior) e $\sum_{n\geq 0}|x|^n$ converge quando $|x| < 1$, segue da proposição 3.8 que a série $\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ converge quando $|x| < 1$. Portanto, pelo teorema 3.5, a função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ é derivável, com

$$f'(x) = \sum_{n\geq 1} n\binom{\alpha}{n}x^{n-1} = \sum_{n\geq 1}\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}, \tag{3.10}$$

onde utilizamos o item (c) do lema anterior na última igualdade. Segue daí e do item (a) do referido lema que

$$\begin{aligned}(1+x)f'(x) &= \alpha(1+x)\sum_{n\geq 1}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} \\ &= \alpha\left\{\sum_{n\geq 1}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 1}\binom{\alpha-1}{n-1}x^n\right\} \\ &= \alpha\left\{1 + \sum_{n\geq 2}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} + \sum_{n\geq 2}\binom{\alpha-1}{n-2}x^{n-1}\right\} \\ &= \alpha\left\{1 + \sum_{n\geq 2}\binom{\alpha}{n-1}x^{n-1}\right\} = \alpha\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n \\ &= \alpha f(x).\end{aligned}$$

Logo, se $g(x) = (1+x)^{-\alpha}f(x)$, então, para $|x| < 1$, temos

$$\begin{aligned}g'(x) &= -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f(x) + (1+x)^{-\alpha}f'(x) \\ &= (1+x)^{-\alpha-1}\{-\alpha f(x) + (1+x)f'(x)\} = 0,\end{aligned}$$

de sorte que g é constante no intervalo $(-1,1)$. Mas, como $g(0)=1$, segue que $(1+x)^{-\alpha}f(x)=1$ para $|x|<1$, conforme desejado.

Para o caso geral, suponha que $(1+x)^\alpha=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n$ para um certo $\alpha\neq 0$ e todo $x\in(-1,1)$, e mostremos que valem fórmulas análogas para $\alpha-1$ e $\alpha+1$ (e $|x|<1$):

(a) Para $\alpha-1$: o teorema 3.5 garante que, para $|x|<1$, temos

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha-1} &= \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha=\frac{1}{\alpha}\sum_{n\geq 1}n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}\\ &=\sum_{n\geq 1}\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1}=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha-1}{n}x^n.\end{aligned}$$

(b) Para $\alpha+1$: temos

$$\begin{aligned}(1+x)^{\alpha+1} &= (1+x)\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^n+\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}x^{n+1}\\ &=1+\sum_{n\geq 1}\left\{\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n-1}\right\}x^n=1+\sum_{n\geq 1}\binom{\alpha+1}{n}x^n\\ &=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha+1}{n}x^n.\end{aligned}$$

Por indução, (3.9) vale para todos $\alpha\neq 0$ e $|x|<1$. □

Corolário 3.12. *Para $\alpha,\beta\neq 0$, temos*

$$(1+\beta x)^\alpha=\sum_{n\geq 0}\binom{\alpha}{n}(\beta x)^n,$$

para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $|x|<\frac{1}{|\beta|}$.

Prova. Basta aplicar (3.9) para βx no lugar de x, observando que $|\beta x|<1\Leftrightarrow|x|<\frac{1}{|\beta|}$. □

Como exemplo de aplicação do corolário acima, para $|x|<\frac{1}{2}$ temos

$$(1-2x)^{-1/2}=\sum_{n\geq 0}\binom{-1/2}{n}(-2x)^n,$$

com

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)\\ &=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\\ &=\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}\\ &=\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{(2n)!}{2^n\cdot 2^n n!}\\ &=\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Portanto, para $|x|<\frac{1}{2}$, temos

$$(1-2x)^{-1/2}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}x^n, \tag{3.11}$$

igualdade que nos será útil no exemplo 3.15.

Problemas – Seção 3.2

1. * Generalize o resultado da proposição 3.4, mostrando que, se a função $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$ tem expansão em série de potências $f(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, então, para $k\in\mathbb{N}$, temos $f(x)^k=\sum_{n\geq 0}c_nx^n$, onde
$$c_n=\sum a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$$
e a soma acima se estende a todas as $k-$uplas $(i_1,\ldots,i_k)$ de inteiros não negativos tais que $i_1+\cdots+i_k=n$.

2. * Para $k \in \mathbb{N}$ e $|x| < 1$, prove que

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{n} x^n.$$

3. * O objetivo deste problema é mostrar que a função $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(1+x)$ admite um desenvolvimento em série de potências, bem como obter esse desenvolvimento. Para tanto, faça os seguintes itens:

   (a) Se $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, use o corolário 3.7 para concluir que $a_0 = 0$ e $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, para $n \geq 1$.

   (b) Use a proposição 3.8, em conjunção com o teorema 3.5, para concluir que a série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ define uma função diferenciável $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$.

   (c) Mostre que $g'(x) = \frac{1}{1+x}$ para todo $x \in (-1,1)$; conclua, daí, que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in (-1,1)$.

4. * Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais tal que $|a_n| \leq cM^n$, para certos $c, M > 0$ e todo $n \geq 0$.

   (a) Use a proposição 3.8 para mostrar que, para todo $x \in \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right)$, a série de potências $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ converge.

   (b) Se $f, F : \left(-\frac{1}{M}, \frac{1}{M}\right) \to \mathbb{R}$ são dadas por $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ e $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$, o teorema 3.5 garante que $F' = f$. Conclua, a partir daí e do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n dt = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

   i.e., que podemos calcular a integral de uma função definida por uma série de potências integrando a referida série *termo a termo*.

3.3 Alguns exemplos

Colecionamos, nesta seção, alguns problemas recursivos analisados por meio de funções geradoras. Tais exemplos foram escolhidos com um duplo propósito: por um lado, ilustrar a diversidade de situações às quais o método desenvolvido nas duas seções precedentes pode ser aplicado; por outro, desenvolver técnicas aplicáveis a outras situações relevantes.

Exemplo 3.13. *Calcule, com o auxílio de funções geradoras, o número de soluções inteiras e não negativas da equação*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = m,$$

onde k e m são naturais dados.

Solução. Note que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = m$ se, e só se, $x^{a_1} x^{a_2} \ldots x^{a_k} = x^m$; portanto, há tantas soluções $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ da equação acima quantas forem as maneiras de obter uma parcela x^m no produto

$$f(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots) \ldots (1 + x + x^2 + \cdots)}_{k}$$

(de outro modo, tomando x^{a_1} no primeiro fator, x^{a_2} no segundo fator, $\ldots$, x^{a_k} no $k-$ésimo fator, obtemos x^m no produto). Mas, para $|x| < 1$, temos

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k = \frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{n} x^n,$$

onde utilizamos, na última igualdade, o resultado do problema 2 da seção anterior. Logo, a resposta de nosso problema é o coeficiente de x^m na série acima, i.e., $\binom{k+m-1}{m}$, o que concorda com o resultado do problema 8, página 40. □

O uso de funções geradoras é particularmente útil no estudo de sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ que satisfaçam recorrências mais gerais que aquelas tratadas na seção 4.3 de [11] ou, mais geralmente, no capítulo 9 de [15]. Este é o caso, por exemplo, para a sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ tal que $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ e $a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} + 2a_{n-2}$ para $n \geq 2$, uma vez que os coeficientes da relação de recorrência não são constantes. No entanto, a teoria de funções geradoras pode ser aplicada com sucesso; a ideia é considerar a função geradora correspondente, $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, e cumprir as várias etapas descritas a seguir, as quais compõem o procedimento padrão para muitos problemas similares:

I. Utilizar os valores iniciais e a recorrência satisfeita pela sequência para concluir que a função geradora $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ da sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ converge em algum intervalo da forma $(-r, r)$.

II. Novamente com o auxílio dos valores iniciais e da recorrência dada, realizar operações apropriadas com a expansão em série da função f, para obter uma *forma fechada* (i.e., uma *fórmula*) para f.

III. Desenvolver a forma fechada obtida no item II. em série de potências.

IV. Usar a unicidade da representação em série de potências, dada pelo corolário 3.7, para concluir que a_n é igual ao coeficiente de x^n na expansão obtida na etapa III.

Observe que o procedimento acima descrito foi precisamente aquele seguido no exemplo 3.2, sendo a primeira etapa concluída logo após a proposição 3.8. Sigamo-lo novamente para a sequência dada logo acima.

Exemplo 3.14. *Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ a sequência tal que $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ e*

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n} + 2a_{n-2},$$

para $n \geq 2$. Calcule a_n em função de n.

Solução. Seja $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a função geradora correspondente e cumpramos as etapas I a IV acima.

Etapa I. Tentaremos aplicar o critério de comparação para séries de potências, dado pela proposição 3.8: impondo que $|a_{n-2}| \leq \alpha^{n-2}$ e $|a_{n-1}| \leq \alpha^{n-1}$, e aplicando a desigualdade triangular à recorrência satisfeita pela sequência, obtemos

$$|a_n| \leq \frac{|a_{n-1}|}{n} + 2|a_{n-2}| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{n} + 2\alpha^{n-2};$$

portanto, teremos $|a_n| \leq \alpha^n$ se $\frac{\alpha^{n-1}}{n} + 2\alpha^{n-2} \leq \alpha^n$, ou, equivalentemente, se

$$\frac{\alpha}{n} + 2 \leq \alpha^2.$$

Uma vez que tal desigualdade é verdadeira para $\alpha = 2$ e todo $n \geq 2$, e $|a_0| \leq 2^0$, $|a_1| \leq 2^1$, segue por indução que $|a_n| \leq 2^n$, para todo $n \geq 1$. Portanto, a proposição 3.8 garante que a função f está definida e é diferenciável no intervalo $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Etapa II. Escrevendo a recorrência do enunciado como $na_n = -a_{n-1} + 2na_{n-2}$, para $n \geq 2$, temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n\geq 1} na_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n\geq 2} na_n x^{n-1} \\
&= a_1 + \sum_{n\geq 2}(-a_{n-1} + 2na_{n-2})x^{n-1} \\
&= a_1 - \sum_{n\geq 2} a_{n-1}x^{n-1} + 2x\sum_{n\geq 2} na_{n-2}x^{n-2} \\
&= a_1 - (f(x) - a_0) + 2x\left(\sum_{n\geq 2}(n-2)a_{n-2}x^{n-2} + 2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^{n-2}\right) \\
&= a_1 + a_0 - f(x) + 2x(f'(x) + 2f(x)).
\end{aligned}$$

Mas, como $a_1 + a_0 = 0$, obtemos $f'(x) = (4x-1)f(x) + 2xf'(x)$ ou, ainda,

$$(2x-1)f'(x) = -(4x-1)f(x).$$

Para integrar a equação diferencial acima, note inicialmente que f é positiva num intervalo $(-r, r)$, para algum $0 < r \leq \frac{1}{2}$ (uma vez que $f(0) = a_0 = 1 > 0$ e f diferenciável $\Rightarrow$ f contínua, logo positiva numa vizinhança de 0). Portanto, para $|x| < r$ podemos escrever

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{4x-1}{2x-1} = -2 - \frac{1}{2x-1}$$

e, daí, para $|x| < r \leq \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\log f(x) &= \log f(t)\Big|_0^x = \int_0^x \frac{f'(t)}{f(t)}dt \\ &= -\int_0^x \left(2 + \frac{1}{2t-1}\right) dt \\ &= -2x - \frac{1}{2}\log(1-2x).\end{aligned}$$

Assim, para $|x| < r \leq \frac{1}{2}$, temos

$$f(x) = e^{-2x}(1-2x)^{-1/2}. \tag{3.12}$$

Etapa III. Inicialmente, note que o desenvolvimento em série de potências de e^{-2x} é dado por (3.7), com $a = -2$, e vale em toda a reta:

$$e^{-2x} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-2)^k}{k!}x^k.$$

Portanto, segue de (3.11) e da proposição 3.4 que, para f dada como

em (3.12) e $|x| < r \leq \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(\sum_{k\geq 0} \frac{(-2)^k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{l\geq 0} \frac{1}{2^l}\binom{2l}{l}x^l\right) \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k+l=n} \frac{(-2)^k}{k!}\cdot\frac{1}{2^l}\binom{2l}{l}\right)x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{(-2)^{n-l}}{(n-l)!}\cdot\frac{1}{2^l}\binom{2l}{l}\right)x^n \\ &= \sum_{n\geq 0}\left(2^n\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l}}{4^l(n-l)!}\binom{2l}{l}\right)x^n.\end{aligned}$$

Etapa IV. Comparando a expansão acima com $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, segue que

$$a_n = 2^n \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l}}{4^l(n-l)!}\binom{2l}{l}.$$

□

A fim de aplicar as idéias discutidas até aqui a problemas de contagem de caráter recursivo, há que se cumprir uma etapa a mais, além das descritas imediatamente antes do exemplo anterior, qual seja: dado um problema combinatório no qual se pede calcular, em função de n, a quantidade a_n de configurações possíveis, temos que calcular os valores a_n iniciais e obter uma recorrência satisfeita pela sequência $(a_n)_{n\geq 1}$. Vejamos um exemplo relevante.

Exemplo 3.15. *Calcule, em função de n, o número a_n de modos de particionar um polígono convexo de n lados em triângulos, utilizando diagonais que não se intersectam no interior do mesmo.*

Solução. É claro que $a_3 = 1$. Para obter uma recorrência para o caso $n > 3$, rotule os vértices do polígono por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ no sentido anti-horário. Se A_1A_k for uma das diagonais utilizadas, com

$3 \leq k \leq n-1$, então a partição de $A_1A_2\ldots A_n$ induz partições dos polígonos $A_1A_2\ldots A_k$ e $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$, conforme pede o enunciado. Reciprocamente, fixado $3 \leq k \leq n-1$, quaisquer partições dos polígonos $A_1A_2\ldots A_k$ e $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$, conforme pede o enunciado, geram, por justaposição, uma partição do polígono $A_1A_2\ldots A_n$.

Como há a_k maneiras de particionar $A_1A_2\ldots A_k$ e a_{n-k+1} maneiras de particionar $A_1A_kA_{k+1}\ldots A_n$ como pede o enunciado, aplicando sucessivamente os princípios multiplicativo e aditivo obtemos, para $n \geq 4$, a recorrência

$$a_n = \sum_{k=3}^{n-1} a_k a_{n-k+2}. \tag{3.13}$$

Não há argumento simples que permita estabelecer a convergência, em algum intervalo aberto centrado em 0, da função geradora $\sum_{n\geq 3} a_n x^n$ correspondente à recorrência acima. No entanto, não é difícil o leitor se convencer de que o cumprimento desta etapa é desnecessário caso obtenhamos, ao final, uma fórmula posicional para a_n tal que a série $\sum_{n\geq 3} a_n x^n$ convirja em algum intervalo aberto centrado em 0. Teremos mais a dizer sobre isso logo adiante.

Voltando à análise de (3.13), para simplificar a notação ponhamos $a_1 = a_2 = 0$ (convenção que condiz com o fato de que polígonos *degenerados* não possuem lados ou diagonais), de maneira que

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} a_k a_{n-k+2},$$

para $n \geq 2$. Observe que o segundo membro acima se assemelha à fórmula (3.6) para os coeficientes do produto de duas séries de potências. Fazendo $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ e lembrando que $a_1 = a_2 = 0$, calculemos

$f(x)^2$:

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(\sum_{k\geq 1} a_k x^k\right)\left(\sum_{l\geq 1} a_l x^l\right) = \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k+l=n} a_k a_l\right) x^n \\ &= \sum_{n\geq 2}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}\right) x^n = \sum_{n\geq 4}\left(\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}\right) x^n. \end{aligned}$$

Uma vez que $a_n = \sum_{k=2}^{n} a_k a_{n-k+2}$ para $n \geq 4$, temos

$$a_{n-2} = \sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}$$

para $n \geq 6$ e, daí,

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \left(\sum_{k=2}^{2} a_k a_{4-k}\right) x^4 + \left(\sum_{k=2}^{3} a_k a_{5-k}\right) x^5 + \sum_{n\geq 6}\left(\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}\right) x^n \\ &= \sum_{n\geq 6} a_{n-2} x^n = x^2 \sum_{n\geq 6} a_{n-2} x^{n-2} = x^2 \sum_{n\geq 4} a_n x^n \\ &= x^2(f(x) - a_3 x^3) = x^2(f(x) - x^3). \end{aligned}$$

Fazendo $g(x) = \sum_{n\geq 0} a_{n+3} x^n$, temos $f(x) = x^3 g(x)$ e segue da igualdade acima que

$$x^6 g(x)^2 = x^2(x^3 g(x) - x^3) = x^5(g(x) - 1),$$

i.e., $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$. Portanto,

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4x}},$$

e segue de $g(0) = a_3 = 1$ que

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1-4x}}.$$

(Lembre-se de que estamos assumindo que a série que define f – e, portanto, g – converge num intervalo da forma $(-r, r)$, para algum $r > 0$; diminuindo r, se necessário, podemos supor que $r < \frac{1}{4}$, a fim de que as raízes quadradas acima representem números reais.)

Finalmente, temos de (3.11) e do lema 3.10 que

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{n\geq 0}\binom{1/2}{n}(-4x)^n\right) \\ &= -\frac{1}{2x}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\binom{-1/2}{n-1}(-4x)^n \\ &= -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}\binom{2(n-1)}{n-1}(-4)^n x^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\binom{2(n-1)}{n-1}x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n. \end{aligned}$$

Sendo $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, para $n \geq 0$, segue de $x^3 g(x) = f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$ que

$$a_n = \frac{1}{n-2}\binom{2(n-3)}{n-3} = C_{n-3},.$$

para $n \geq 3$.

Neste ponto, rigorosamente não sabemos se a fórmula acima fornece realmente a solução do problema colocado, uma vez que, para obtê-la, assumimos a convergência da série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$. De outro modo, uma vez que não temos como garantir *a priori* a convergência da série $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$, todo o processo acima não passou de um conjunto de argumentos heurísticos para inferir que C_{n-3} é, provavelmente, o valor correto de a_n. Entretanto, para concluir basta mostrarmos que, pondo $a_1 = a_2 = 0$ e $a_n = C_{n-3}$, para $n \geq 3$, temos $a_n = \sum_{k=2}^{n} a_k a_{n-k+2}$ para $n \geq 4$.

Para o que falta, comecemos verificando que a série $\sum_{n\geq 0} C_n x^n$ converge em algum intervalo centrado em 0, o que é fácil: uma vez

que

$$\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \leq \binom{2n}{n} \leq 2^{2n} = 4^n$$

para $n \geq 0$, basta aplicar a proposição 3.8 para concluir que tal série converge no intervalo $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Definindo

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} C_n x^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}x^n$$

e revertendo os passos acima, concluímos que

$$g(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

e, daí, que $xg(x)^2 - g(x) + 1 = 0$. Então, pondo $f(x) = x^3 g(x)$, segue que

$$f(x) = \sum_{n\geq 3} C_{n+3}x^n := \sum_{n\geq 3} a_n x^n$$

e $f(x)^2 = x^2(f(x) - x^3)$. Portanto,

$$\left(\sum_{n\geq 3} a_n x^n\right)^2 = x^2\left(\sum_{n\geq 3} a_n x^n - x^3\right),$$

igualdade que desenvolvida em ambos os membros fornece a recorrência

$$a_n = \sum_{k=3}^{n-1} a_k a_{n-k+2},$$

satisfeita para $n \geq 4$. Logo, a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que $a_n = C_{n-3}$ para $n \geq 3$ é, realmente, a solução de nosso problema. □

Ainda em relação ao exemplo anterior, dizemos que

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \tag{3.14}$$

$n \geq 0$, é o n-ésimo **número de Catalan** (em homenagem ao matemático belga do século XIX Eugène Catalan). Uma vez que $a_n = C_{n-3}$ satisfaz a recorrência (3.13) é imediato verificar que a sequência $(C_n)_{n\geq 0}$ satisfaz a recorrência

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}, \tag{3.15}$$

conhecida como **recorrência de Catalan**. O problema 6 mostra outra situação combinatória interessante modelada pela recorrência de Catalan.

Terminamos este capítulo utilizando funções geradoras para apresentar uma prova alternativa do item (b) do exemplo 7.28 de [11]. Para tanto, precisamos de dois resultados auxiliares, colecionados a seguir.

Lema 3.16. *As séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ convergem. Ademais,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}.$$

Prova. A convergência das séries em questão segue do exemplo 3.22 e da proposição 3.25 de [13]. Para o que falta, basta observar que, se $s = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, então

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - 2\sum_{k\geq 1} \frac{1}{(2k)^2} = s - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} = s - \frac{s}{2} = \frac{s}{2}.$$

□

O outro resultado de que precisamos é o conteúdo do teorema 8.2 de [48]. Uma vez que sua demonstração (baseada num uso judicioso na identidade de Abel (7.20) de [11]) é consideravelmente mais refinada que as dos demais resultados de Cálculo utilizados até aqui, limitar-nos-emos a enunciá-lo.

Lema 3.17. *Se a série de potências $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge em todo $x \in (-1,1)$ e se a série numérica $\sum_{n\geq 0} a_n$ também converge, então*

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geq 0} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n.$$

Podemos, finalmente, apresentar o exemplo desejado.

Exemplo 3.18. *Sejam $n > 1$ inteiro e $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto de n inteiros positivos, tal que dois quaisquer de seus subconjuntos têm somas de elementos distintas. Prove que*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Prova. Afirmamos inicialmente que basta provar que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2$. De fato, sendo esse o caso, seja $A' = A \cup \{2^N\}$, com $2^N > a_1 + \cdots + a_n$. A escolha de N garante que dois subconjuntos quaisquer de A' também têm somas de elementos distintos, de sorte que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{2^N} \leq 2.$$

Para o que falta, se $0 < x < 1$, então, nas notações do parágrafo anterior ao problema 10, página 29, as condições do enunciado garantem que

$$\prod_{i=1}^{k}(1 + x^{a_i}) = 1 + \sum_{\emptyset \neq S \subset A} x^{\sigma(S)} \leq 1 + \sum_{j\geq 1} x^j = \frac{1}{1-x}.$$

Tomando logaritmos naturais e utilizando o resultado do problema 3, página 102, obtemos sucessivamente

$$\sum_{i=1}^{k} \log(1 + x^{a_i}) \leq -\log(1-x)$$

e

$$\sum_{i=1}^{k}\left(x^{a_i}-\frac{x^{2a_i}}{2}+\frac{x^{3a_i}}{3}-\cdots\right)\le x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,$$

para $0<x<1$. Dividindo ambos os membros da desigualdade acima por x, concluímos, então, que

$$\sum_{i=1}^{k}\left(x^{a_i-1}-\frac{x^{2a_i-1}}{2}+\frac{x^{3a_i-1}}{3}-\cdots\right)\le 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots,$$

desigualdade válida em todo o intervalo $[0,1)$.

Fixado $x\in(0,1)$ e integrando a última desigualdade acima sobre o intervalo $(0,x)$, obtemos

$$\sum_{i=1}^{k}\int_0^x\left(t^{a_i-1}-\frac{t^{2a_i-1}}{2}+\frac{t^{3a_i-1}}{3}-\cdots\right)dt\le\int_0^x\left(1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}+\cdots\right)dt$$

ou, ainda, (cf. problema 4, página 102)

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\left(x-\frac{x^{2a_i}}{2^2}+\frac{x^{3a_i}}{3^2}-\cdots\right)\le x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots.$$

Observe agora que, a aplicação conjunta da primeira parte do lema 3.16 e do lema 3.17 garante que os limites, quando $x\to 1-$, do primeiro e do segundo membros acima existem, podendo ser calculados termo a termo. Portanto, tomando tais limites, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\left(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots\right)\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots.$$

Por fim, a segunda parte do lema 3.16 fornece

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}\le\frac{\sum_{j\ge1}\frac{1}{j^2}}{\sum_{j\ge1}\frac{(-1)^{j-1}}{j^2}}=2.$$

□

Problemas – Seção 3.3

1. Resolva a recorrência $a_1=2$ e $a_{k+1}=a_k+(k+1)$, para $k\ge1$, por meio de funções geradoras.

2. Obtenha o resultado do teorema 4.16 de [11] utilizando a teoria de funções geradoras.

3. A sequência $(a_n)_{n\ge0}$ é dada por $a_0=1$ e $a_{n+1}=2a_n+n$, para $n\ge0$. Para calcular a_n em função de n, faça os seguintes itens:

   (a) Se $a_n\le\alpha^n$, então $a_{n+1}\le\alpha^{n+1}$, contanto que $\alpha^n(\alpha-2)\ge n$; conclua que $a_n\le 3^n$, para todo $n\ge0$.

   (b) Mostre que a função geradora de $(a_n)_{n\ge0}$ converge no intervalo $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ e é dada por $f(x)=\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}$.

   (c) Ache constantes reais A, B e C tais que

   $$\frac{1-2x+2x^2}{(1-x)^2(1-2x)}=\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{1-2x}.$$

   (d) Expanda em série de potências cada uma das funções no segundo membro da igualdade acima para concluir que $a_n=2^{n+1}-(n+1)$, para $n\ge0$.

4. Dados $k,m\in\mathbb{N}$, calcule, com o uso de funções geradoras, o número de soluções inteiras da equação $a_1+a_2+\cdots+a_k=m$, tais que $a_i\ge1$, para $1\le i\le k$.

5. Calcule o número de soluções inteiras e não negativas da equação $a_1+a_2+a_3+a_4=20$, tais que $a_1\ge2$ e $a_3\le7$.

6. Uma partícula se move no plano Cartesiano de maneira que, estando no ponto (a,b), pode se deslocar para um dos pontos $(a+1,b)$ ou $(a,b+1)$. Para $n\in\mathbb{N}$, seja a_n o número de modos

da partícula sair de $A_0(0,0)$ e chegar em $A_n(n,n)$, sem nunca tocar um ponto (x,y) acima da bissetriz dos quadrantes ímpares (i.e., tal que $y > x$). Faça os seguintes itens:

(a) Seja $A_k(k,k)$, com $0 \leq k < n$. Prove que há exatamente $a_k a_{n-1-k}$ trajetórias tais que A_k é o último ponto em que a partícula toca a reta $y = x$ antes de chegar em A_n.

(b) Conclua que $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$ e, daí, que $a_n = C_n$ para $n \geq 1$, onde C_n é o $n-$ésimo número de Catalan.

7. O objetivo deste problema é utilizar funções geradoras para calcular, em função de n, o número d_n de permutações caóticas de I_n (cf. exemplo 2.5). Para tanto, em vez da função geradora ordinária $\sum_{n\geq 2} d_n x^n$ (note que $d_1 = 0$), consideraremos a **função geradora exponencial**

$$f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Faça os seguintes itens:

(a) Fixados $n \geq 3$ e $1 \leq k \leq n-1$, seja $(a_1, \ldots, a_n)$ uma permutação caótica de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $a_n = k$.

i. Se $a_k = n$, prove que há exatamente d_{n-2} tais permutações.

ii. Se $a_k \neq n$, prove que há exatamente d_{n-1} tais permutações.

(b) Conclua, a partir do item (a), que $d_n = (n-1)(d_{n-1}+d_{n-2})$, para $n \geq 3$.

(c) Impondo que $d_k \leq k!\alpha^k$ para $k < n$ e algum $\alpha > 0$, mostre que $d_n \leq n!\alpha^n$ se $\alpha \geq 2$. Conclua que a série que define f converge em $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e, portanto, define uma função diferenciável nesse intervalo.

(d) Use o resultado do item (b) para mostrar que $(1-x)f'(x) = x(f(x)+1)$.

(e) Diminuindo o intervalo de definição de f, se necessário, podemos supor que f está definida em $(-r, r)$, para algum $0 < r < \frac{1}{2}$, e que $f(x) > 0$ em tal intervalo (pois $f(0) = \frac{1}{2}$). Conclua que, para $|x| < r$,

$$\frac{d}{dx} \log(f(x)+1) = -1 + \frac{1}{1-x}.$$

(f) Deduza, a partir do resultado do item (e), que

$$f(x) = -1 + \frac{1}{1-x} \cdot e^{-x}.$$

(g) Use (3.1), (3.7) e a proposição 3.4 para concluir que

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{l!} \right) x^n.$$

(h) Calcule d_n em função de n com o auxílio do item (g) e do corolário 3.7.

8. * Para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, definimos o **inteiro mais próximo de x**, denotado $[x]$, como o único inteiro n tal que $|x - n| < \frac{1}{2}$. Em símbolos,

$$n = [x] \Leftrightarrow |x - n| < \frac{1}{2}.$$

Se $n > 1$ é inteiro e d_n denota o número de permutações caóticas de I_n, prove que $d_n = \left[\frac{n!}{e}\right]$.

9. Também podemos usar funções geradoras exponenciais para calcular o número de funções sobrejetoras entre dois conjuntos finitos (cf. exemplo 2.6). Para tanto, dados $m, n \in \mathbb{N}$ e conjuntos finitos A e B tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, faça os seguintes itens:

(a) Mostre que o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é igual ao número de maneiras de distribuir m objetos distintos em n caixas distintas, de maneira que nenhuma caixa fique vazia.

(b) Conclua que o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ é dado por

$$\sum \frac{m!}{a_1!a_2!\ldots a_n!},$$

a soma acima se estendendo a todas as $n-$uplas $(a_1, \ldots, a_n)$ de inteiros positivos tais que $a_1 + \cdots + a_n = m$.

(c) Se $g(x) = \left(x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^n$, use o resultado do problema 1, página 101, para mostrar que o termo correspondente a x^m no desenvolvimento de g é dado por

$$\sum \frac{x^{a_1}}{a_1!} \cdot \frac{x^{a_2}}{a_2!} \cdots \frac{x^{a_n}}{a_n!},$$

a soma acima se estendendo a todas as $n-$uplas $(a_1, \ldots, a_n)$ de inteiros positivos tais que $a_1 + \cdots + a_n = m$. Conclua que o número de funções sobrejetoras é o *coeficiente* de $\frac{x^m}{m!}$ no desenvolvimento de g.

(d) Use (3.7) para mostrar que

$$g(x) = (e^x - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k e^{(n-k)x}.$$

Em seguida, desenvolvendo $e^{(n-k)x}$ em série de potências com o auxílio de (3.7), conclua, a partir do item (c), que o número desejado de funções sobrejetoras é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m.$$

CAPÍTULO 4

Existência de Configurações

Há, grosso modo, dois tipos de problemas em Combinatória: aqueles nos quais queremos contar de quantas maneiras é possível realizar uma certa escolha e aqueles nos quais queremos assegurar a ocorrência de determinada situação. Para resolver um problema do primeiro tipo acima, utilizamos, dentre outras, as técnicas de contagem discutidas nos três capítulos anteriores. Para o segundo tipo de problema, ainda não dispomos de nenhuma ideia que possa ser utilizada sistematicamente. Nesse sentido, nosso objetivo neste capítulo é remediar tal situação, a começar pela aplicação do princípio de indução a esse tipo de problema. A continuação, discutimos o famoso *princípio da casa dos pombos* de Dirichlet, seguido pelo estudo de relações de ordem parcial, o qual culmina com uma demonstração de um resultado de Dilworth sobre relações entre cadeias e anticadeias em um tal conjunto.

Por fim, explicamos como a busca por um invariante ou semiinvariante adequado pode fornecer o resultado final de certos algoritmos aparentemente aleatórios.

4.1 Indução e existência de configurações

Nesta seção examinamos alguns exemplos que mostram como o princípio de indução pode ser utilizado, em situações combinatórias, para estabelecer a existência de configurações possuindo certas propriedades. Observe que, nem sempre, o argumento indutivo utilizado será explicitado *formalmente*, i.e., nem sempre explicitaremos o(s) caso(s) inicial(is), a hipótese de indução e o passo de indução.

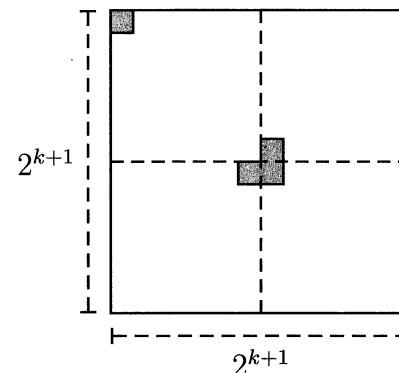
Para uma revisão sobre o princípio de indução, suficiente para nossos propósitos, sugerimos ao leitor a referência [11].

Exemplo 4.1 (Alemanha). *Dado $n \in \mathbb{N}$, prove que podemos montar um tabuleiro $2^n \times 2^n$ usando uma peça 1×1 e vários* L-tridominós *(peças do formato abaixo, onde cada quadradinho tem lado 1):*

Prova. Mostremos por indução que todo quadrado $2^n \times 2^n$ pode ser montado conforme pedido, com a peça 1×1 ocupando um dos cantos.

Se $n = 1$, o que se pede é imediato, e está ilustrado na figura abaixo:

Por hipótese de indução, suponha que todo tabuleiro $2^k \times 2^k$ possa ser montado conforme pedido. Tome um tabuleiro $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ e o divida em quatro tabuleiros $2^k \times 2^k$. Em seguida (veja a figura abaixo),

posicione um L-tridominó no centro do quadrado, de forma que ele ocupe uma casa 1×1 de três dos quatro quadrados $2^k \times 2^k$; então, posicione a peça 1×1 na casa do canto do quadrado $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ que pertence ao quadrado $2^k \times 2^k$ que não foi intersectado pelo L-tridominó.

Em cada um dos quatro quadrados $2^k \times 2^k$, esse encaixe faz com que cada um deles tenha uma peça 1×1 em um de seus cantos. Portanto, por hipótese de indução, o restante de cada um deles pode ser montado com L-tridominós, e isso faz com que o mesmo seja válido para o quadrado $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ (com a peça 1×1 em um de seus cantos). □

Como seria de esperar, o próximo exemplo mostra que, por vezes, é necessário utilizarmos indução completa.

Exemplo 4.2 (Leningrado). *Forme todos os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que não contêm elementos consecutivos. Para cada um deles, calcule o quadrado do produto de seus elementos. Prove que a soma de todos esses números é igual a $(n + 1)! - 1$.*

Prova. Façamos indução completa sobre $n \geq 1$.

Se $n = 1$, então o único subconjunto não vazio de $\{1\}$ é ele mesmo, de forma que a soma pedida é $1 = 2! - 1$.

Por hipótese de indução, suponha que, para $1 \leq n \leq k$, a soma desejada é igual a $(n + 1)! - 1$. Agora, observe que os subconjuntos

não vazios de $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ sem elementos consecutivos podem ser divididos em duas categorias:

(i) os subconjuntos não vazios de $\{1, 2, \ldots, k\}$ sem elementos consecutivos;

(ii) os conjuntos da forma $A \cup \{k+1\}$, onde A é um subconjunto sem elementos consecutivos de $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Pela hipótese de indução, a soma dos quadrados dos produtos dos elementos dos conjuntos de tipo (i) é $(k+1)! - 1$, enquanto a soma dos quadrados dos produtos dos elementos dos conjuntos de tipo (ii) é $(k+1)^2(k!-1) + (k+1)^2$ (a parcela $(k+1)^2$ vem da necessidade de contemplarmos o conjunto $\{k+1\}$. Portanto, a soma dos quadrados dos produtos dos elementos de todos os subconjuntos desejados de $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ é

$$\begin{aligned}(k+1)! - 1 + (k+1)^2(k!-1) + (k+1)^2 &= \\ = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! & \\ = (k+2)(k+1)! - 1 & \\ = (k+2)! - 1. &\end{aligned}$$

□

O exemplo a seguir mostra que indução é um argumento bastante útil em situações combinatórias envolvendo configurações geométricas. Outros exemplos dessa natureza serão contemplados nos problemas propostos nesta seção.

Exemplo 4.3 (Rússia). *Seja n um inteiro positivo ímpar. Em um campo aberto, n crianças estão posicionadas de tal modo que, para cada uma delas, as distâncias às outras $n-1$ crianças são todas distintas. Cada criança tem uma pistola d'água e, ao som de um apito, atira na criança mais próxima de si. Mostre que uma das crianças permanecerá enxuta.*

Prova. Consideremos, primeiramente, o caso $n = 3$. Sejam A, B e C as crianças e suponha, sem perda de generalidade, que $AB < BC < AC$. Então, A atira em B e B em A, de modo que C fica enxuta.

Suponha agora, por hipótese de indução, que com $n = 2k-1$ crianças, onde $k > 1$ é inteiro, ao menos uma delas sempre fica enxuta. Consideremos $2k+1$ crianças, posicionadas de modo a satisfazer as condições do enunciado. Como as distâncias entre os pares de crianças são duas a duas distintas, existem duas crianças A e B tais que a distância de A a B é a menor de todas as distâncias. Assim, A atira em B e vice-versa. Descartando as crianças A e B, restam $2k-1$ crianças satisfazendo as condições do enunciado. Há agora duas possibilidades:

(i) Uma delas atira em A ou B: nesse caso, no máximo $2k-2$ tiros foram disparados em direção a alguma das $2k-1$ crianças restantes e, assim, ao menos uma delas fica enxuta (aqui, estamos utilizando o *princípio da casa dos pombos* – veja a próxima seção).

(ii) Nenhuma das $2k-1$ crianças restantes atira em A ou B: pela hipótese de indução, ao menos uma delas permanece enxuta. □

Nosso próximo exemplo mostra que um argumento indutivo pode ser invocado para compor somente *uma parte* da solução de um certo problema.

Exemplo 4.4. *Desejamos escrever um dos números 0, 1 ou 2 em cada uma das casas de uma tabela de 19 linhas e 86 colunas, de forma que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

(a) Em cada coluna haja exatamente k zeros.

(b) *Escolhidas duas colunas quaisquer, exista uma linha tal que as duas entradas da tabela situadas na interseção dessa linha com cada uma das duas colunas sejam, em alguma ordem,* 1 *e* 2.

Para que valores de k isso é possível?

Solução. Nas hipóteses do enunciado (e mais geralmente), dizemos que um conjunto de m linhas *distingue* n colunas se, para qualquer escolha de duas das n colunas, é possível escolher uma das m linhas de modo que os números escritos nas casas de interseção dessa linha com as duas colunas escolhidas sejam, em alguma ordem, 1 e 2.

Afirmamos que m linhas distinguem no máximo 2^m colunas. Realmente, é claro que uma linha distingue no máximo duas colunas. Agora, suponha que j linhas distinguem no máximo 2^j colunas. Então, como uma linha distingue no máximo duas colunas, $j+1$ linhas distinguirão no máximo dois grupos de 2^j colunas: a distinção feita pela $(j+1)-$ésima linha entre os dois grupos de 2^j colunas é

$$\underbrace{11\ldots1}_{2^j}\underbrace{22\ldots2}_{2^j},$$

em alguma ordem. Portanto, $j+1$ linhas distinguirão no máximo $2^j+2^j=2^{j+1}$ colunas.

Voltando à tabela do enunciado, como $86>2^6$, a afirmação acima garante que precisamos de no mínimo 7 linhas para distinguir as 86 colunas. Por outro lado, 7 linhas também são suficientes, uma vez que $86<2^7$. De fato, basta escolher 86 sequências distintas de 7 termos, cada um dos quais igual a 1 ou 2, e preencher as 7 primeiras linhas com essas 86 sequências. As demais linhas podem ser preenchidas aleatoriamente.

Portanto, devemos ter $0\le k\le 19-7=12$. □

Para o próximo exemplo recorde que, dado $n\in\mathbb{N}$, denotamos $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$. Também, dados conjuntos A e B, sua *diferença simétrica* $A\Delta B$ é definida por

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Exemplo 4.5. *Para $n\in\mathbb{N}$, seja $\mathcal{P}_n$ a família dos subconjuntos de I_n. Se $f:\mathcal{P}_n\to I_n$ é uma função qualquer, mostre que existem $A,B\in\mathcal{P}_n$ distintos, tais que*

$$f(A)=f(B)=\max(A\Delta B).$$

Prova. Para $n=1$, temos $f:\{\emptyset,\{1\}\}\to\{1\}$ e $\emptyset\,\Delta\{1\}=\{1\}$, de forma que

$$f(\emptyset)=f(\{1\})=1=\max(\{1\}).$$

Suponha a assertiva do enunciado válida quando $n=k$, e tome uma função $f:\mathcal{P}_{k+1}\to I_{k+1}$. Há dois casos a considerar:

(i) f aplica todos os conjuntos em $\mathcal{P}_k$ em elementos de I_k: nesse caso, basta aplicar a hipótese de indução à restrição de f a I_k.

(ii) existe $A\in\mathcal{P}_k$ tal que $f(A)=k+1$: seja $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}_{k+1}$ a família formada pelos elementos de $\mathcal{P}_{k+1}$ contendo $k+1$, i.e.,

$$\mathcal{F}=\{X\cup\{k+1\};\ X\in\mathcal{P}_k\}.$$

Consideremos dois subcasos:

- existe $B\in\mathcal{F}$ tal que $f(B)=k+1$: então, $k+1\in B\setminus A$, de forma que $A\neq B$, $k+1\in A\Delta B$ e

$$f(A)=f(B)=k+1=\max(A\Delta B).$$

- f aplica $\mathcal{F}$ em I_k: defina $g:\mathcal{P}_k\to I_k$ pondo $g(X)=f(X\cup\{k+1\})$, para todo $X\in P_k$. Por hipótese de indução, existem $A',B'\in\mathcal{P}_k$ distintos, tais que

$$g(A')=g(B')=\max(A'\Delta B').$$

Como $(A' \cup \{k+1\})\Delta(B' \cup \{k+1\}) = A'\Delta B'$, concluímos que $f(A' \cup \{k+1\})$ e $f(B' \cup \{k+1\})$ são ambos iguais a $\max\big((A' \cup \{k+1\})\Delta(B' \cup \{k+1\})\big)$, com $A' \cup \{k+1\} \neq B' \cup \{k+1\}$.

□

Problemas – Seção 4.1

1. (Índia.) Prove que, para $n \geq 6$, todo quadrado pode ser particionado em n outros quadrados.

2. (Torneio das Cidades.) O ponto O está situado no interior de um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_n$. Considere todos os ângulos $\angle A_iOA_j$, com $1 \leq i, j \leq n$ distintos. Prove que pelo menos $n-1$ desses ângulos não são agudos.

3. (Torneio das Cidades.) Em um polígono convexo P algumas diagonais foram traçadas, sem interseções no interior de P. Mostre que há pelo menos dois vértices de P tais que as diagonais traçadas não incidem em nenhum desses dois vértices.

4. (Hungria.) Em um tabuleiro $n \times n$, temos um certo número de torres, não havendo mais de uma torre por casa. Uma torre pode mover-se de uma casa a outra se, e só se, essas duas casas pertencem à mesma linha ou coluna do tabuleiro e não há outras torres em casas intermediárias. Por outro lado, se duas torres pertencem à mesma linha ou coluna que outra e não há uma terceira torre entre elas, então dizemos que uma qualquer dessas torres pode atacar a outra. Prove que, utilizando três cores, é possível pintar as torres de modo que nenhuma delas possa atacar qualquer outra da mesma cor.

5. São dadas no plano n retas distintas. Prove que é possível pintar as regiões em que tais retas dividem o plano de branco ou preto, de forma que duas regiões que têm um lado comum tenham sempre cores distintas.

6. (Torneio das Cidades.) Cada quadrado de um tabuleiro é pintado de azul ou vermelho. Prove que os quadrados de uma dessas duas cores são tais que uma rainha de xadrez pode mover-se por todos eles (passando possivelmente mais de uma vez por um ou mais quadrados dessa cor), sem visitar casa alguma da outra cor. Observe que uma rainha pode mover-se um número arbitrário de casas ao longo de qualquer fila horizontal, vertical ou diagonal do tabuleiro.

7. Dados n pontos no plano, nem todos colineares, prove que:

   (a) Ao menos uma reta passa por exatamente dois desses n pontos.

   (b) Os n pontos determinam pelo menos n retas distintas.

   O resultado do item (a) é conhecido como o **teorema de Sylvester-Gallai**[1], enquanto o do item (b) é devido a Erdös e de Bruijn[2].

8. São dados, no plano, $2n$ pontos em *posição geral*, i.e., tais que três quaisquer não são colineares. Se n desses pontos são azuis e os outros n são vermelhos, prove que é sempre possível traçarmos n segmentos satisfazendo as seguintes condições:

   (a) cada segmento une um ponto azul a um ponto vermelho.

[1] Após James Sylvester, matemático inglês, e Tibor Gallai, matemático húngaro, ambos do século XX.

[2] Após Paul Erdös, matemático húngaro, e Nicolaas de Bruijn, matemático holandês, ambos também do século XX.

(b) dois segmentos quaisquer não se intersectam.

4.2 O princípio da casa dos pombos

O **princípio da casa dos pombos**, também conhecido como *princípio das gavetas* ou **princípio de Dirichlet**[3], pode ser enunciado, em sua versão mais simples, como segue.

Proposição 4.6. *Se distribuirmos n pombos em $n-1$ gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, dois pombos.*

Prova. Basta observar que, se cada gaiola contivesse no máximo 1 pombo, então teríamos, ao todo, não mais do que $n-1$ pombos. □

Em que pese sua simplicidade, o princípio da casa dos pombos admite consequências surpreendentes, conforme atestam os exemplos a seguir.

Exemplo 4.7. *Em uma festa há n pessoas. Mostre que, nessa festa, podemos achar duas pessoas que conhecem, na festa, uma mesma quantidade de pessoas (aqui e no que segue, sempre suporemos que a relação de conhecer alguém é simétrica).*

Prova. Em primeiro lugar, qualquer uma das n pessoas conhece no mínimo 0 e no máximo $n-1$ pessoas da festa. Há dois casos a considerar:

(a) Cada pessoa conhece pelo menos uma outra na festa: tome $n-1$ salas, numeradas de 1 a $n-1$ e ponha na sala i a(s) pessoa(s) (se houver alguma) que conhece(m) exatamente i outras. Como temos $n-1$ salas e n pessoas, o princípio da casa dos pombos garante que

[3]Após o matemático alemão do século XIX Gustav L. Dirichlet, quem primeiro chamou atenção para a importância do mesmo em Matemática.

ao menos uma das salas conterá, no mínimo, 2 pessoas. Essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas.

(b) Existe pelo menos uma pessoa que não conhece nenhuma outra na festa (um penetra!). Então, ninguém conhece todas as outras pessoas na festa, de modo que podemos numerar $n-1$ salas de 0 a $n-2$ e raciocinar como em (a). Novamente, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos uma das salas conterá, no mínimo, duas pessoas. Também como antes, essas duas pessoas conhecem, na festa, a mesma quantidade de pessoas. □

Exemplo 4.8 (Romênia - adaptado). *Pintamos cada subconjunto do conjunto $\{1, 2, \ldots, 10\}$ com uma dentre n cores possíveis. Encontre o maior valor de n para o qual sempre existam conjuntos distintos e não vazios $A, B \subset \{1, 2, \ldots, 10\}$, tais que A, B e $A \cup B$ estejam pintados com uma mesma cor.*

Solução. Seja $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Dadas dez cores C_1, C_2, ..., C_{10}, pintemos os subconjuntos não vazios de X que possuem k elementos com a cor C_k; desse modo, dados subconjuntos não vazios A e B de X, há duas possibilidades: ou A e B têm quantidades diferentes de elementos e, então, foram pintados com cores diferentes, ou A e B têm uma mesma quantidade de elementos; nesse último caso, $A \cup B$ tem mais elementos do que A e B, tendo, portanto, sido pintado com uma cor diferente daquela de A e B. Portanto, $n \leq 9$.

Consideremos agora somente nove cores e seja $A_i = \{1, \ldots, i\}$, para $1 \leq i \leq 10$. Como

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{10}$$

é uma cadeia de dez subconjuntos distintos e não vazios de X e só temos nove cores, o princípio da casa dos pombos assegura que, para alguma escolha de índices $1 \leq i < j \leq 10$, os conjuntos A_i e A_j estão

pintados com uma mesma cor. Como $A_i \cup A_j = A_j$, basta fazer $A_i = A$ e $A_j = B$ para que as condições do enunciado sejam satisfeitas. Assim, o maior valor possível de n é 9. □

Há várias generalizações interessantes do princípio da casa dos pombos. A proposição a seguir mostra aquela que é, provavelmente, a mais útil de todas elas; para o enunciado da mesma, lembre-se de que, dado um real x, a **parte inteira** de x, denotada $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro menor ou igual a x. Por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ e $\lfloor x \rfloor = x$ se, e só se, $x \in \mathbb{Z}$; mais geralmente, $\lfloor x \rfloor$ é o único inteiro n tal que

$$n \leq x < n + 1.$$

Proposição 4.9. *Se colocarmos n pombos em k gaiolas, então ao menos uma das gaiolas conterá, no mínimo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ pombos.*

Prova. Por contradição, suponha que, quando dispusemos os n pombos nas k gaiolas, nenhuma delas ficou com pelo menos $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor + 1$ pombos. Então, cada uma das k gaiolas ficou com, no máximo, $\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ pombos. Portanto, todas as gaiolas juntas contêm, no máximo, $k \lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor$ pombos. Mas, como

$$k \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \leq k \left(\frac{n-1}{k} \right) = n - 1 < n,$$

temos uma contradição. □

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 4.10. *Prove que, em qualquer grupo de vinte pessoas, há ao menos três que nasceram num mesmo dia da semana.*

Prova. Tome como gaiolas os sete dias da semana e como pombos as pessoas. A regra para por uma pessoa em uma gaiola é a mesma: o dia em que a pessoa nasceu. O princípio da casa dos pombos garante, agora, que ao menos uma gaiola conterá, pelo menos, $\lfloor \frac{20-1}{7} \rfloor + 1 = 3$ pessoas. Assim, ao menos duas das pessoas terão nascido num mesmo dia da semana. □

Exemplo 4.11 (Leningrado). *Cada casa de um tabuleiro 5×41 é pintada de vermelho ou azul. Prove que é possível escolhermos 3 linhas e 3 colunas do tabuleiro de tal modo que as 9 casas de interseção tenham uma mesma cor.*

Prova. Como usamos somente duas cores, o princípio da casa dos pombos implica que, em uma coluna de 5 casas, uma das cores deve ocorrer ao menos três vezes. Para cada uma das 41 colunas, anote a cor predominante na mesma. Novamente pelo princípio da casa dos pombos, o fato de que uma, dentre as duas cores, predomina em cada uma das 41 colunas garante que uma das duas cores predomina em pelo menos 21 colunas. Podemos supor que essa cor predominante em pelo menos 21 colunas é a vermelha. Escolha 21 colunas predominantemente vermelhas e despreze as demais. Agora, em cada uma das 21 colunas vermelhas escolhidas, selecione três das casas vermelhas e despreze as outras duas casas (mesmo que alguma delas também seja vermelha).

Uma vez que há $\binom{5}{2} = 10$ possíveis modos de escolhermos 3 das 5 casas de uma coluna e ficamos com 21 colunas, segue novamente pelo princípio da casa dos pombos que, em ao menos $\lfloor \frac{21-1}{10} \rfloor + 1 = 3$ colunas, as casas vermelhas escolhidas ocupam exatamente as mesmas posições. Então, temos ao menos 3 colunas tais que as casas dessas colunas situadas em um mesmo conjunto de 3 linhas são todas vermelhas, o que nos dá a conclusão do problema. □

O próximo exemplo usa uma generalização óbvia do princípio da casa dos pombos, para o caso em que temos um número finito de gaiolas e um número infinito de pombos.

Exemplo 4.12 (Bósnia). *Seja* $\mathbb{N}$ *o conjunto dos inteiros positivos. Um conjunto* $A \subset \mathbb{N}$ *é* bom *se, para algum* $n \in \mathbb{N}$*, a equação* $x - y = n$ *tiver infinitas soluções* (x, y)*, com* $x, y \in A$*. Se* $\mathbb{N} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{100}$*, prove que ao menos um dos conjuntos* A_i *é bom.*

Prova. Pelo princípio da casa dos pombos, para cada inteiro $k \geq 0$ existem $1 \leq i_k \leq 100$ e inteiros $x_k > y_k$ em

$$\{101k + 1, 101k + 2, \ldots, 101(k+1)\} \cap A_{i_k}.$$

Obtemos, assim, infinitos pares $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$, ... tais que os números de cada par estão em um mesmo dos conjuntos A_1, A_2, ..., A_{100}. Ademais, $i > j \Rightarrow x_i > y_i > x_j > y_j$.

Então, novamente pelo princípio da casa dos pombos, existem $1 \leq m \leq 100$ e $B \subset \mathbb{N}$ infinito tais que $i \in B \Rightarrow x_i, y_i \in A_m$. Afirmamos que A_m é bom. De fato, como $x_i - y_i \in \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, mais uma aplicação do princípio da casa dos pombos garante a existência de um inteiro $1 \leq n \leq 100$ e $C \subset B$ infinito tais que $i \in C \Rightarrow x_i - y_i = n$. Mas, como $i \in C \Rightarrow x_i, y_i \in A_m$, concluímos que a equação $x - y = n$ admite infinitas soluções em A_m. □

Como próxima aplicação do princípio de Dirichlet, provemos um caso particular de um famoso resultado dos matemáticos húngaros Paul Erdös e Esther Szekeres (cf. [25]), conhecido na literatura como o **teorema de Erdös-Szekeres** (para uma outra prova do mesmo, veja a próxima seção).

Exemplo 4.13 (Erdös-Szekeres). *Dada uma sequência qualquer de* $n^2 + 1$ *números reais distintos, é sempre possível encontrar uma subsequência crescente ou decrescente de* $n + 1$ *termos.*

Prova. Seja $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n^2+1}\}$ o conjunto formado pelos $n^2 + 1$ termos da sequência dada e suponha que a mesma não possua uma subsequência crescente com pelo menos $n + 1$ termos. Então, toda

subsequência crescente que começa em um certo $x \in A$ tem no máximo n termos. Defina

$$f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$$

pondo $f(x) =$ tamanho da maior subsequência crescente da sequência dada, começando com x. Como A tem $n^2 + 1$ elementos, o princípio da casa dos pombos garante que teremos pelo menos

$$\left\lfloor \frac{(n^2+1) - 1}{n} \right\rfloor + 1 = n + 1$$

elementos de A com uma mesma imagem, digamos $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n+1}}$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1}$. Se $x_{i_j} < x_{i_l}$ para certos $1 \leq j < l \leq n + 1$, teríamos $f(x_{i_j}) > f(x_{i_l})$, uma vez que poderíamos aumentar uma sequência crescente começando em x_{i_l} colocando x_{i_j} antes. Mas isso é um absurdo, de maneira que

$$x_{i_1} > x_{i_2} > \cdots > x_{i_{n+1}}.$$

Assim, temos uma sequência decrescente de $n + 1$ termos. □

Terminamos esta seção, apresentando mais alguns exemplos que ilustram a versatilidade de aplicações do princípio da casa dos pombos.

Exemplo 4.14 (Coréia do Sul.). *Para cada inteiro positivo* m*, prove que existem inteiros* a *e* b *tais que* $|a|, |b| \leq m$ *e*

$$0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{m + 2}.$$

Prova. Seja A o conjunto dos reais da forma $a + b\sqrt{2}$, com $0 \leq a, b \leq m$ e a e b não ambos iguais a 0. Uma vez que $x_1 + y_1\sqrt{2} = x_2 + y_2\sqrt{2}$, com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$, implica $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$, concluímos, com o auxílio do princípio fundamental da contagem, que o conjunto A tem exatamente $(m+1)^2 - 1 = m^2 + 2m$ elementos, sendo o maior deles igual a $m(1 + \sqrt{2})$.

Seja $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$ e considere os intervalos $I_j = ((j-1)\alpha, j\alpha]$, onde $1 \leq j \leq m^2+2m$. Então, a união dos I_j's é o intervalo $(0, m(1+\sqrt{2})]$, o qual contém A. Se um dos elementos de A estiver em I_1, nada mais teremos a fazer. Senão, restarão m^2+2m-1 intervalos para conter os m^2+2m elementos de A, de modo que, pelo princípio da casa dos pombos, ao menos um desses intervalos, I_k digamos, conterá ao menos dois dos elementos de A, digamos $x_1 + y_1\sqrt{2}$ e $x_2 + y_2\sqrt{2}$, com $x_1 + y_1\sqrt{2} < x_2 + y_2\sqrt{2}$. Mas, como I_k tem comprimento α, segue que

$$0 < (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\sqrt{2} = (x_2 + y_2\sqrt{2}) - (x_1 + y_1\sqrt{2}) < \alpha.$$

Por fim, como $|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1| \leq m$, basta fazermos $a = x_2 - x_1$ e $b = y_2 - y_1$. □

Exemplo 4.15 (IMO). *Seja A um conjunto de 1985 inteiros positivos, nenhum dos quais tem um divisor primo maior que 26. Mostre que é possível encontrarmos quatro elementos de A cujo produto seja uma quarta potência.*

Solução. Todo $x \in A$ é da forma $x = 2^{\alpha_{1x}} 3^{\alpha_{2x}} \ldots 23^{\alpha_{9x}}$, com α_1, α_2, ...,$\alpha_9 \in \mathbb{Z}_+$. O número de 9−uplas distintas $(\alpha_1, \ldots, \alpha_9)$ é, módulo 2, igual a $2^9 = 512$. Como $1985 > 512$, o princípio das casas dos pombos garante que podemos escolher $x_1, y_1 \in A$ tais que $\alpha_{ix_1} \equiv \alpha_{iy_1} (\text{mod}\, 2)$, para $1 \leq i \leq 9$. Portanto, $x_1 y_1 = z_1^2$, para algum $z_1 \in \mathbb{N}$. Como $1985 - 2 > 512$, invocando novamente o princípio das casas dos pombos, podemos escolher $x_2, y_2 \in A$ tais que $x_2 y_2 = z_2^2$, para algum $z_2 \in \mathbb{N}$. Prosseguindo dessa forma, obtemos $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{513}, y_{513} \in A$, dois a dois distintos e tais que $x_j y_j = z_j^2$, para algum $z_j \in \mathbb{N}$.

Como $z_1, z_2, \ldots, z_{513}$ também só contém primos menores que 26 em suas fatorações e $513 > 512$, uma aplicação adicional do princípio das casas dos pombos garante a existência de índices $1 \leq k < l \leq 513$ tais que $z_k z_l = w^2$, para algum $w \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$x_k y_k x_l y_l = z_k^2 z_l^2 = (z_k z_l)^2 = (w^2)^2 = w^4.$$

□

Exemplo 4.16 (IMO). *Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reais tais que $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Prove que, para todo inteiro $k \geq 2$, há inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$, não todos nulos, tais que $|a_i| \leq k-1$ para todo i e*

$$|a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}.$$

Prova. Inicialmente, se $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é uma das k^n sequências tais que $0 \leq a_i \leq k-1$ para $1 \leq i \leq n$, então a desigualdade de Cauchy (cf. teorema 7.14 do volume 1) garante que

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \leq (k-1)\sqrt{n}.$$

Particione o intervalo $[0, (k-1)\sqrt{n}]$ em $k^n - 1$ subintervalos de comprimentos iguais a $\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}$. Uma vez que há k^n sequências $(a_1$, a_2, ..., $a_n)$ distintas, o princípio da casa dos pombos garante que há duas dessas n−uplas, digamos $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ e $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, tais que as somas $\sum_{i=1}^n b_i x_i$ e $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ pertencem a um mesmo desses $k^n - 1$ subintervalos. Portanto,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (b_j - c_j) x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} b_j x_j - \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1},$$

e basta fazer $a_i = b_i - c_i$, para $1 \leq i \leq n$. □

Exemplo 4.17. *155 pássaros estão pousados sobre uma círculo de centro O. Dois pássaros A e B são mutuamente visíveis se e só se $A\widehat{O}B \leq 10°$. Assuma que mais de um pássaro possa pousar em um mesmo ponto. Calcule o menor número possível de pares de pássaros mutuamente visíveis.*

Solução. Tal maior valor possível é 270. Primeiramente, para ver que é possível termos 270 pares de pássaros mutuamente visíveis, tome 35 pontos igualmente espaçados ao redor do círculo e ponha 5 pássaros em cada um de 15 desses pontos, e 4 pássaros em cada um dos 20 pontos restantes. É imediato que dois pássaros serão serão mutuamente visíveis se e somente se estiverem situados em um mesmo ponto. Portanto, há

$$\binom{5}{2} \cdot 15 + \binom{4}{2} \cdot 20 = 270$$

pares de pássaros mutuamente visíveis.

Suponha agora que um pássaro P está situado no ponto A, e um pássaro Q está situado no ponto B, onde A e B são distintos mas $A\widehat{O}B \leq 10°$. Suponha ainda que h pássaros são visíveis a partir de A mas não a partir de B, e que k pássaros são visíveis a partir de B mas não a partir de A, com $h \leq k$. Agora, suponha que todos os pássaros em B voam para A. Então o número de pares de pássaros mutuamente visíveis não aumenta. Repetindo esta operação várias vezes, obtemos ao final uma configuração onde dois pássaros são mutuamente visíveis se e somente se estiverem pousados num mesmo ponto. Ademais, como o número de pares de pássaros visíveis não aumentou ao longo dessas operações, a fim de minimizar tal número é suficiente considerar tais configurações. Assim, pelo princípio da casa dos pombos teremos pássaros em no máximo 35 pontos distintos da círculo.

Tome agora 35 pontos sobre a círculo, rotulados 1, 2, 3, ..., 35, e coloque $x_i \geq 0$ pássaros no ponto i. Nosso problema se resume a minimizar

$$\sum_{i=1}^{35} \binom{x_i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{35} x_i(x_i - 1),$$

com a condição de que $\sum_{i=1}^{35} x_i = 155$. Basta então maximizar $\sum_{i=1}^{35} x_i^2$ com a condição de que $\sum_{i=1}^{35} x_i = 155$. Para tanto, note que se $1 \leq i < j \leq 35$ são tais que $x_i - x_j > 1$, então

$$(x_i^2 + x_j^2) - ((x_i - 1)^2 + (x_j + 1)^2) = 2(x_i - x_j - 1) > 0.$$

Logo, em uma distribuição minimizante dos pássaros, os valores dos x_i podem diferir de no máximo 1, donde podemos supor que $x_1 = \cdots = x_n = a$ e $x_{n+1} = \cdots = x_{35} = a + 1$, com $na + (35 - n)(a + 1) = 155$. É imediato verificar que o mínimo é obtido com $a = 4$ e $n = 20$. □

Problemas – Seção 4.2

1. Marcamos, aleatoriamente, cinco pontos no interior de um quadrado de lado 2cm. Mostre que é sempre possível acharmos dois desses pontos tais que a distância entre eles seja menor ou igual a $\sqrt{2}$cm.

2. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e n um inteiro maior que 1. Mostre que, dentre os números x, $2x$, ..., $(n-1)x$, há ao menos um cuja distância a um inteiro é, no máximo, $\frac{1}{n}$.

3. Mostre que, se escolhermos 800 pontos no interior de um cubo de aresta 10cm, pelo menos um dos segmentos determinados por esses pontos terá comprimento menor que 2cm.

O problema a seguir apresenta mais uma versão útil do princípio da casa dos pombos.

4. * São dadas n gavetas e um inteiro positivo m. Colocamos a_1 objetos na 1ª gaveta, a_2 objetos na 2ª gaveta, ..., a_n objetos na nª gaveta. Se

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq (\text{resp. } >)\, m,$$

prove que ao menos uma das gavetas conterá, no mínimo, m (resp. $m+1$) objetos.

5. Os números de 1 a 15 são distribuídos, aleatoriamente, ao redor de um círculo. Mostre que é sempre possível achar cinco elementos consecutivos, cuja soma seja maior ou igual a 40.

6. São dados dois discos iguais A e B, cada um dividido em 200 setores iguais, os quais estão pintados de branco ou preto. No disco A, há 100 setores brancos e 100 setores pretos, em ordem desconhecida. No disco B, não sabemos quantos setores são brancos. Prove que é possível dispor o disco A sobre o disco B, de modo que pelo menos 100 setores de A fiquem dispostos sobre setores de B de cores iguais às suas.

Os próximos oito problemas utilizam alguns fatos elementares sobre a relação de divisibilidade de inteiros. Antes de tentar resolvê-los o leitor pode achar conveniente reler a introdução ao capítulo 1 de [11] ou, ainda, o capítulo 1 de [14].

7. Prove que, em qualquer conjunto de 52 inteiros, existe um par de inteiros cuja soma ou diferença é um múltiplo de 100.

8. Prove que todo natural n tem um múltiplo cuja representação decimal contém somente os algarismos 0 e 1.

9. (Torneio das Cidades.) Prove que todo natural tem um múltiplo tal que a soma dos algarismos de sua representação decimal é um número ímpar.

10. Mostre[4] que, se a e n são naturais primos entre si, então pelo menos um dos números a, a^2, ..., a^{n-1} deixa resto 1 quando dividido por n.

11. É dado um conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, formado por $n > 1$ inteiros positivos. Prove que existem naturais k e l, tais que $1 \leq k \leq l \leq n$ e a soma $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_l$ seja um múltiplo de n.

12. Mostre que, escolhendo $n+1$ elementos do conjunto I_{2n}, teremos necessariamente dois elementos tais que um divide o outro.

13. (Rússia.) Escolhemos 15 inteiros do conjunto $\{1, 2, \ldots, 1998\}$, dois a dois primos entre si. Prove que ao menos um dos 15 inteiros escolhidos é, necessariamente, um número primo.

14. (Irã.) Seja A um conjunto de 33 números naturais, cada um dos quais com todos os seus fatores primos dentre os primos 2, 3, 5, 7, 11. Prove que existem dois elementos distintos x e y de A tais que xy seja um quadrado perfeito.

15. Dado um conjunto de 10 inteiros positivos, de 2 algarismos cada, prove que é sempre possível obtermos dois subconjuntos disjuntos e não vazios cuja soma dos elementos é a mesma.

16. (Índia.) Um conjunto de números reais é *livre de somas* se não houver dois elementos do conjunto (distintos ou não) cuja soma seja igual a um outro elemento do conjunto. Ache o maior número de elementos que um conjunto livre de somas pode ter, sabendo que ele é um subconjunto do conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2n+1\}$.

[4] Denote por $\varphi(n)$ a expressão (2.7), deduzida no problema 5, página 55, e seja $a \in \mathbb{Z}$ primo com n. Na seção 5.2 de [14], provaremos um teorema de L. Euler, o qual garante que $a^{\varphi(n)}$ sempre deixa resto 1, quando dividido por n. Observe que tal resultado generaliza o pequeno teorema de Fermat – veja o problema 5, página 76.

17. Mostre que, escolhendo $n+1$ elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, 3n\}$, teremos, necessariamente, dois elementos x e y tais que $xy + 1$ ou $4xy + 1$ seja um quadrado perfeito.

18. Para cada inteiro positivo n, encontre o menor inteiro positivo $f(n)$ tal que, para toda partição do conjunto $\{1, 2, \ldots, f(n)\}$ em n conjuntos, existam inteiros $a \geq 0$, $1 \leq x \leq y$ tais que $a + x$, $a + y$ e $a + x + y$ pertençam a um mesmo dos n conjuntos da partição.

19. (Estados Unidos.)

    (a) Cada casa 1×1 de um tabuleiro 3×7 é pintada de branco ou preto. Prove que, independentemente da maneira pela qual pintemos as casas, sempre haverá quatro casas de uma mesma cor e que sejam as casas dos quatro cantos de um retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

    (b) Exiba uma maneira de pintarmos as casas de um tabuleiro 4×6 tal que não existam quatro casas de uma mesma cor e que sejam as casas dos quatro cantos de um retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

20. (IMO.) Dezessete pessoas discutem, por carta, três assuntos, sendo que cada pessoa escreve uma carta para cada uma das dezesseis outras e em cada carta somente um dos três assuntos é discutido. Prove que há três das dezessete pessoas que trocam cartas sobre um mesmo assunto.

21. (OCS.) Prove que, dado um inteiro positivo n, existe um inteiro positivo k_n com a seguinte propriedade: dados k_n pontos quaisquer no espaço, 4 a 4 não coplanares, e associando números inteiros de 1 a n a cada segmento que una dois desses k_n pontos, há, necessariamente, um triângulo com vértices em três dos k_n pontos, tal que os números associados aos seus três lados sejam iguais.

4.3 O teorema de Dilworth

Em 1950, o matemático americano Robert Dilworth publicou um artigo muito interessante (cf. [24]), provando um teorema sobre *conjuntos parcialmente ordenados* que generaliza, dentre outros, o teorema de Erdös-Szekeres (cf. exemplo 4.13).

É o propósito desta curta seção discutir e provar o referido teorema de Dilworth (atualmente conhecido como *o teorema de Dilworth*), obtendo em seguida o teorema de Erdös-Szekeres como corolário. Para tanto, precisamos entender primeiro o que vem a ser um conjunto parcialmente ordenado.

Dizemos que um conjunto não vazio A é **parcialmente ordenado** por $\preceq$ (aqui, $\preceq$ deve ser pensada como uma maneira de *comparar* elementos de A), ou que $(A, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado, se as seguintes condições forem satisfeitas, para todos $a, b \in A$:

(a) (**Reflexividade**) $a \preceq a$.

(b) (**Antissimetria**) $a \preceq b$ e $b \preceq a \Rightarrow a = b$.

(c) (**Transitividade**) $a \preceq b$ e $b \preceq c \Rightarrow a \preceq c$.

Nesse caso, dizemos ainda que $\preceq$ é uma **relação de ordem parcial** em A.

Observe que não exigimos que dois elementos quaisquer de A possam ser comparados via $\preceq$, i.e., pode muito bem ocorrer que existam $a, b \in A$ tais que $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$. Caso tal ocorra, dizemos que a e b são *incomparáveis*; caso contrário, a e b são *comparáveis*. Se $\preceq$ é uma relação de ordem parcial em A, tal que quaisquer dois elementos de A são comparáveis em relação a $\preceq$, dizemos que $\preceq$ é uma **relação**

de ordem total ou, ainda, que $(A, \preceq)$ é um conjunto **totalmente ordenado**.

Exemplo 4.18.

(a) O conjunto dos números reais é totalmente ordenado pela relação de ordem $\preceq$*, tal que* $a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b$.

(b) Sejam X *um conjunto não vazio qualquer e* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$*, a família das partes de* X*. Para* $Y, Z \in \mathcal{F}$ *(i.e.,* $Y, Z \subset X$*), definimos* $Y \preceq Z \Leftrightarrow Y \subset Z$*. É imediato verificar que* $(\mathcal{F}, \preceq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado, em geral denotado simplesmente por* $(\mathcal{P}(X), \subset)$.

(c) Para $a, b \in \mathbb{N}$*, definindo* $a \preceq b \Leftrightarrow a \mid b$*, também é imediato verificar que* $(\mathbb{N}, \preceq)$ *é um conjunto parcialmente ordenado.*

(d) Seja A *um conjunto não vazio, parcialmente ordenado por* $\preceq$*. Se* $B \subset A$ *é não vazio, a restrição de* $\preceq$ *a* B *também o torna um conjunto parcialmente ordenado. Nesse caso, dizemos que* B *é parcialmente ordenado pela relação de ordem* induzida *por* A.

Se $(A, \preceq)$ é um conjunto parcialmente ordenado e $a, b \in A$, escrevemos $a \prec b$ para significar que $a \preceq b$ e $a \neq b$; escrevemos ainda $a \not\preceq b$ para significar que $a \preceq b$ é falso. Um subconjunto B de A é uma **cadeia** em relação a $\preceq$ se, para todos $a, b \in B$, tivermos $a \preceq b$ ou $b \preceq a$. Um tal B é uma **anticadeia** em relação a $\preceq$ se, para todos $a, b \in B$, tivermos $a \not\preceq b$ e $b \not\preceq a$. A título de exercício, sugerimos ao leitor voltar aos exemplos acima e, em cada caso, pensar em exemplos de cadeias e anticadeias.

Podemos finalmente enunciar e provar o teorema de Dilworth.

Teorema 4.19 (Dilworth). *Seja* $(A, \preceq)$ *um conjunto parcialmente ordenado. Se* A *não possui cadeias de comprimento* $n+1$*, então* A *pode ser escrito como a união de, no máximo,* n *anticadeias.*

Prova. Façamos indução sobre n, observando primeiramente que, se A não possui cadeias de comprimento 2, então A é ele mesmo uma anticadeia e o teorema é trivialmente verdadeiro. Por hipótese de indução, suponha que todo conjunto parcialmente ordenado que não possui cadeias de comprimento k pode ser escrito como a união de, no máximo, $k-1$ anticadeias.

Seja $(A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado que não possui cadeias de comprimento $k+1$. Defina B como o subconjunto de A formado pelos elementos máximos das cadeias de comprimento máximo. Afirmamos, inicialmente, que B é uma anticadeia em relação a $\preceq$. Por contradição, suponha que existissem $x, y \in B$ tais que $x \prec y$. Como $x \in B$, podemos tomar uma cadeia C em A, de comprimento máximo e com elemento máximo x; então $C \cup \{y\}$ é uma cadeia em A, com elemento máximo y e comprimento maior que C, o que é um absurdo.

Note, agora, que $(A \setminus B, \preceq)$ não possui cadeias de comprimento k. De fato, se C fosse uma cadeia de comprimento k em $(A \setminus B, \preceq)$, então, uma vez que A não possui cadeias de comprimento $k+1$, a cadeia C seria uma de comprimento máximo em A; logo, algum elemento de C pertenceria a B, o que é uma contradição. Portanto, aplicando a hipótese de indução, concluímos que $A \setminus B$ pode ser escrito como a união de, no máximo, k anticadeias. Por fim, juntando B a tal coleção de anticadeias, segue que A pode ser escrito como a união de, no máximo, $k+1$ anticadeias. □

Conforme mencionado anteriormente, a seguir obtemos o teorema de Erdös-Szekeres como corolário do teorema de Dilworth.

Teorema 4.20 (Erdös-Szekeres). *Se* $a, b \in \mathbb{N}$ *e* $n = ab+1$*, então toda sequência* $(x_1, \ldots, x_n)$*, de números reais distintos, ou possui uma subsequência crescente de* $a+1$ *termos ou uma subsequência decrescente de* $b+1$ *termos.*

Prova. Seja $A = \{(i, x_i); 1 \leq i \leq n\}$ e defina uma relação de ordem parcial $\preceq$ em A pondo

$$(i, x_i) \preceq (j, x_j) \Leftrightarrow (i = j) \text{ ou } (i < j \text{ e } x_i < x_j).$$

É imediato verificar que

$$(i_1, x_{i_1}) \prec (i_2, x_{i_2}) \prec \cdots \prec (i_k, x_{i_k})$$

é uma cadeia em A se, e só se, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ é uma subsequência monótona crescente de $(x_1, \ldots, x_n)$; do mesmo modo, para $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$,

$$\{(i_1, x_{i_1}), (i_2, x_{i_2}), \ldots, (i_k, x_{i_k})\}$$

é uma anticadeia em A se, e só se, $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ é uma subsequência monótona decrescente de $(x_1, \ldots, x_n)$.

Suponha, agora, que $(x_1, \ldots, x_n)$ não possui subsequências crescentes de tamanho $a + 1$. Então, A não possui cadeias de comprimento $a + 1$, e segue do teorema de Dilworth que A pode ser escrito como a união de $l \leq a$ anticadeias, digamos $A_1, \ldots, A_l$. Mas, como

$$ab + 1 = |A| \leq \sum_{i=1}^{l} |A_i|,$$

segue do princípio da casa dos pombos que, para algum $1 \leq i \leq l$, devemos ter

$$|A_i| \geq \left\lfloor \frac{ab}{l} \right\rfloor + 1 \geq b + 1.$$

□

Problemas – Seção 4.3

1. Seja A um conjunto de $n^2 + 1$ inteiros positivos. Prove que existe um subconjunto B de A, com $n + 1$ elementos e satisfazendo exatamente uma dentre as condições a seguir:

   (a) Para todos $a, b \in B$, tem-se que $a \mid b$ ou $b \mid a$.

   (b) Para todos $a, b \in B$, tem-se que $a \nmid b$ e $b \nmid a$.

2. Generalize o resultado do teorema de Erdös-Szekeres para conjuntos parcialmente ordenados finitos $(A, \preceq)$, tais que $|A| = ab + 1$, com $a, b \in \mathbb{N}$.

3. Sejam dados $m, n \in \mathbb{N}$ e uma tabela $m \times \left(n^{2^m} + 1\right)$ de números dois a dois distintos. Mostre que é possível escolher $n+1$ colunas tais que cada uma das linhas da tabela $m \times (n+1)$ composta pelas colunas escolhidas formem sequências crescentes ou decrescentes.

4.4 Invariância

Nos problemas combinatórios que discutiremos aqui, consideramos *algoritmos*[5] que envolvem escolhas aleatórias de entradas e tentamos estudar as possíveis saídas após um certo número de iterações. Nesse sentido, uma abordagem por vezes frutífera consiste em procurar associar um **invariante** ao algoritmo, i.e., um objeto matemático que se comporte de maneira previsível ao longo de cada iteração, independentemente da entrada em questão.

Uma vez que não há regra geral que nos ensine qual invariante associar a cada situação dada, limitar-nos-emos aqui a examinar alguns exemplos, relevantes para os problemas posteriormente propostos.

[5]Um **algoritmo** é uma sequência finita de operações bem definidas que, uma vez realizadas, fornecem um resultado, também denominado a **saída** do algoritmo.

Exemplo 4.21. *Há vários sinais + e − escritos em uma lousa. A cada segundo podemos apagar dois sinais e, no lugar deles, escrever um sinal +, se os sinais apagados eram iguais, ou um sinal −, se os sinais apagados eram diferentes. Mostre que, quando restar um só sinal escrito na lousa, este não dependerá da ordem em que fizemos as substituições.*

Solução. Pela regra de sinais para produtos, o produto dos sinais escritos na lousa após cada operação é um invariante para o algoritmo descrito. Assim, o resultado final será igual ao sinal da multiplicação de todos os sinais + e − inicialmente escritos e, portanto, não dependerá da ordem que fizermos as substituições. □

Exemplo 4.22 (Bulgária). *Há* 2000 *bolas brancas em uma caixa. Há, ainda, um número suficiente de bolas brancas, verdes e vermelhas fora da caixa. As seguintes operações são permitidas com as bolas da caixa:*

(a) Trocar duas bolas brancas por uma bola verde.

(b) Trocas duas bolas vermelhas por uma bola verde.

(c) Trocas duas bolas verdes por uma branca e uma vermelha.

(d) Trocar uma bola branca e uma verde por uma vermelha.

(e) Trocar uma bola verde e uma vermelha por uma branca.

Se, após uma quantidade finita de operações, restaram três bolas na caixa, prove que ao menos uma delas é verde. Existe um número finito de operações que deixe somente uma bola na caixa?

Solução. Suponha que, em um dado momento, tenhamos x bolas brancas, y bolas verdes e z bolas vermelhas na caixa. Analisemos como se comporta a quantidade $x + 2y + 3z$ quando perfazemos uma das operações permitidas:

- (a): $x + 2y + 3z$ não muda;
- (b): $x+2y+3z$ muda para $x+2(y+1)+3(z-2) = x+2y+3z-4$;
- (c): $x+2y+3z$ muda para $(x+1)+2(y-2)+3(z+1) = x+2y+3z$;
- (d): $x+2y+3z$ muda para $(x-1)+2(y-1)+3(z+1) = x+2y+3z$;
- (e): $x + 2y + 3z$ muda para $(x + 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = x + 2y + 3z - 4$.

De acordo com a análise acima, o resto da divisão de $x + 2y + 3z$ por 4 é um invariante para a situação descrita no problema. Como inicialmente temos $x = 2000$ e $y = z = 0$, segue que $x + 2y + 3z$ é sempre um múltiplo de 4.

Note agora que, com somente três bolas na caixa, temos $x+y+z = 3$ e $x + 2y + 3z = 4k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $y = 0$, então $x + z = 3$ e $x + 3z = 4k$; mas, aí, $4k = x + 3z = x + 3(3 - x) = 9 - 2x$, um absurdo.

Por outro lado, se em algum momento tivermos uma só bola na caixa, teremos $x + y + z = 1$ e $x + 2y + 3z = 4k$, o que também gera, claramente, uma contradição. □

Vejamos, a seguir, alguns exemplos mais sofisticados.

Exemplo 4.23 (União Soviética). *Inicialmente, temos $n > 1$ números escritos em uma lousa. Uma operação permitida com esses números é escolher dois deles, a e b digamos, apagá-los e escrever na lousa o número $\frac{a+b}{4}$. Assim, após cada operação, a quantidade de números escritos na lousa diminui em uma unidade. Se, inicialmente, todos os números escritos eram iguais a 1, prove que, quando restar somente um número, ele será, necessariamente, maior ou igual que $\frac{1}{n}$.*

Prova. Suponha que, em algum momento, tenhamos escritos na lousa os números $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$. Associe à lousa, nesse momento, o número

$$f(x_1, \ldots, x_{k+1}) = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{k+1}}.$$

Sem perda de generalidade, suponha que apaguemos os números x_k e x_{k+1}, substituindo-os por $x'_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{4}$. Como

$$\frac{4}{x_k + x_{k+1}} \leq \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}},$$

é imediato que

$$f(x_1, \ldots, x_{k-1}, x'_k) \leq f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}).$$

Portanto, $f(x_1, \ldots, x_k)$ é um *semiinvariante* para o problema (i.e., a relação de ordem entre os números $f(x_1, \ldots, x_k)$, antes e depois de cada operação, é um invariante para o problema – em nosso caso, tais números formam uma sequência não crescente). Assim, quando tivermos somente o número x escrito na lousa, então devemos ter

$$n = f(1, 1, \ldots, 1) \geq f(x) = \frac{1}{x}$$

e, daí, $x \geq \frac{1}{n}$. □

Exemplo 4.24 (Putnam). *Seja A o número de sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ de inteiros positivos tais que*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{10}} = 1.$$

Diga, com justificativa, se A é par ou ímpar.

Solução. Primeiramente, provemos que a equação

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{10}} = 1$$

tem um número par de soluções $x_1 = a_1, \ldots, x_{10} = a_{10}$ satisfazendo a condição $a_1 \neq a_2$. De fato, sendo $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_{10} = a_{10}$ uma solução com $a_1 \neq a_2$, segue que $x_1 = a_2$, $x_2 = a_1, \ldots, x_{10} = a_{10}$ também é solução, e vice-versa. Portanto, podemos agrupar tais soluções em pares, de sorte que há um número par delas.

Assim, para cacularmos a paridade do número de soluções da equação, basta calcularmos a paridade do número de soluções da mesma satisfazendo a condição adicional $a_1 = a_2$ (aqui está a ideia de invariância: a paridade do número de soluções da equação não varia com a imposição de que seja $a_1 = a_2$).

Analogamente, basta calcularmos a paridade do número de soluções da equação satisfazendo as condições $a_3 = a_4$, $a_5 = a_6$, $a_7 = a_8$, $a_9 = a_{10}$. Sendo esse o caso, temos

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_7} + \frac{1}{a_9} = \frac{1}{2}. \tag{4.1}$$

Contudo, seguindo o mesmo raciocínio acima, é fácil concluir que há um número par de soluções de (4.1) tais que $a_1 \neq a_3$, assim como um número par de soluções tais que $a_5 \neq a_7$. Então, para calcular a paridade do número de soluções, podemos supor que $a_1 = a_3$ e $a_5 = a_7$. A equação se resume agora a

$$\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_5} + \frac{1}{a_9} = \frac{1}{2}. \tag{4.2}$$

Uma vez mais, podemos seguir o raciocínio acima e concluir que a paridade do número de soluções é a paridade do número de soluções de (4.2) nas quais $a_1 = a_5$, i.e., a paridade do número de soluções de

$$\frac{4}{a_1} + \frac{1}{a_9} = \frac{1}{2}.$$

Esta última equação equivale a

$$a_9 = \frac{2a_1}{a_1 - 8} = 2 + \frac{16}{a_1 - 8}, \tag{4.3}$$

de maneira que $a_1 - 8 = 1, 2, 4, 8$ ou 16. Portanto, temos exatamente cinco soluções para (4.3) e, uma vez que a paridade de A é igual à paridade do número de soluções de tal equação, segue que A é ímpar. □

Exemplo 4.25 (Bielorrússia). *Sobre um tabuleiro infinito repousa um cubo, de tal modo que uma de suas faces ($\mathcal{F}$, digamos) está situada exatamente sobre uma das casas do tabuleiro. O cubo começa, então, a rolar sobre o tabuleiro, girando sobre suas arestas. Em algum momento, o cubo para sobre a casa do tabuleiro na qual estava inicialmente situado. Notou-se, nesse instante, que a face do cubo em contato com o tabuleiro era novamente $\mathcal{F}$. É possível que, agora, a face $\mathcal{F}$ esteja girada de 90° em relação à sua posição original?*

Prova. Não é possível! Para provar isto, pintemos os vértices das casas do tabuleiro alternadamente de preto e branco, como em um tabuleiro de xadrez. Então, na posição inicial do cubo, $\mathcal{F}$ tem dois vértices pretos e dois brancos. Pinte os 4 vértices remanescentes do cubo também de preto ou branco, de tal modo que qualquer aresta do cubo una vértices de cores distintas.

É fácil ver que, à medida em que o cubo se movimenta, vértices pretos do cubo estão sempre situados sobre vértices pretos do tabuleiro (eis aqui a invariância!). Mas, se em um momento futuro a face $\mathcal{F}$ passasse pela posição original girada de 90° em relação à sua posição original, teríamos os dois vértices pretos de $\mathcal{F}$ situados sobre vértices brancos do tabuleiro. Isso é uma contradição e prova nossa afirmação inicial. □

Problemas – Seção 4.4

1. (União Soviética.) Inicialmente, o professor escreve na lousa um trinômio de segundo grau. Em um instante posterior qualquer, uma operação permitida consiste em apagar o trinômio escrito na lousa, digamos $ax^2 + bx + c$, trocando-o ou pelo trinômio $cx^2 + bx + a$ (caso $c \neq 0$) ou por um trinômio da forma $a(x+t)^2 + b(x+t) + c$, com $t \in \mathbb{R}$ escolhido aleatoriamente. Se o trinômio inicialmente escrito na lousa era $x^2 - x - 1$, existe alguma sequência de operações que faça aparecer, na lousa, o trinômio $x^2 + 3x - 1$?

2. Retiramos duas casas situadas em cantos opostos de um tabuleiro 8×8. É possível cobrir as 62 casas restantes com peças 2×1? Justifique sua resposta!

3. Inicialmente, os números $1, 2, 3, \ldots, 1998$ são escritos em uma lousa. A cada jogada, escolhemos dois dos números escritos, a e b digamos, os apagamos e trocamos por $|a - b|$. Após 1997 jogadas, resta apenas um número escrito na lousa. Prove que, a despeito da ordem em que os números tiverem sido escolhidos, o número restante será sempre ímpar.

4. Um professor de matemática propôs a seguinte atividade a seus alunos: um aluno escreveria na lousa uma fila com seis números inteiros; um segundo aluno escolheria três desses números, digamos x, y e z, os substituiria respectivamente por $x - y - z$, $3x - 3y - 2z$ e $4x - 2y + 4z$ e escreveria uma nova fila de seis números abaixo da primeira, repetindo os três números não escolhidos. Em seguida, o procedimento acima seria repetido com a nova fila. Após a aula, a lousa foi parcialmente apagada, restando legíveis duas filas:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6 \quad \text{e} \quad 3\ 7\ 2\ 15\ 8\ 8$$

(não sabemos quantas filas existiam entre as que sobraram). Prove que algum aluno errou as contas em sua vez.

5. (Torneio das Cidades.) Dez moedas são dispostas ao redor de um círculo, mostrando *caras* (as *coroas* estão para baixo). Dois movimentos são permitidos:

   (a) Virar 4 moedas dispostas em posições consecutivas.

   (b) Virar 4 moedas dispostas como $XXOXX$ (X é uma das moedas a ser virada, mas O não é virada).

   É possível ter todas as dez moedas mostrando *coroas* após uma sequência finita de tais movimentos?

6. Inicialmente, temos os números 1, 2, 3, ..., n escritos em uma lousa. Uma operação permitida é apagar quaisquer dois números a e b, escrevendo o número $a + b + ab$ em seu lugar (de modo que tenhamos, agora, um número a menos na lousa). Se tal operação for repetida $n - 1$ vezes, prove que, quando restar um só número na lousa, este não dependerá da ordem em que as operações foram realizadas.

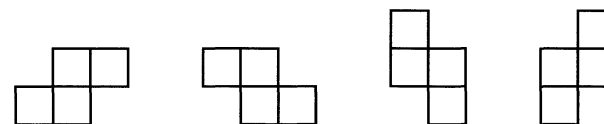
7. Em cada vértice de um quadrado temos uma certa quantidade de fichas (possivelmente nenhuma). Uma operação permitida é remover uma certa quantidade de fichas de um vértice e colocar o dobro de fichas em um dos vértices adjacentes a esse vértice (para tal fim, há um número suficientemente grande de fichas fora do quadrado, prontas para serem utilizadas). Suponha que começamos com apenas uma ficha em um dos vértices, os outros três vértices estando vazios. É possível, após um certo número de movimentos, termos 1, 9, 8 e 9 fichas nos vértices do quadrado, quando este é percorrido no sentido horário?

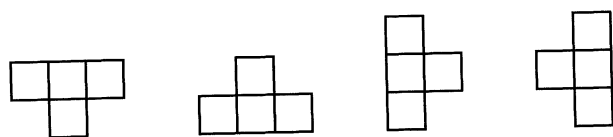
8. São dados, no plano, $2n$ pontos em *posição geral*, i.e., tais que três quaisquer não são colineares. Se n desses pontos são azuis e os outros n são vermelhos, prove que é sempre possível traçarmos n segmentos satisfazendo as seguintes condições:

   (a) cada segmento une um ponto azul a um ponto vermelho.

   (b) dois segmentos quaisquer não se intersectam.

9. Um cubo de aresta n é particionado em n^3 cubinhos unitários. Dois cubinhos unitários são *adjacentes* se partilham uma face. A e B disputam o seguinte jogo no cubo: A começa em um cubo unitário de sua escolha, se movendo para um cubo unitário adjacente a esse. Então B, partindo desse último cubo unitário, se move para um outro cubo unitário adjacente ao mesmo. A e B se alternam em suas jogadas, sem nunca revisitar um cubinho já escolhido, e o primeiro que não conseguir jogar perde. Se A e B jogam com as melhores estratégias possíveis, quem ganhará o jogo?

10. (a) Decida se é possível numerar as casas de um tabuleiro 8×8 de 1 a 64, de modo que a soma dos quatro números de todo conjunto de quatro casas dispostas de um dos modos a seguir seja um múltiplo de 4:

    (b) Faça o mesmo para os conjuntos de quatro casas de um dos formatos abaixo:

11. (Leningrado.) Todas as 120 faces de vinte cubos iguais são coloridas de branco ou preto, sendo 60 faces de cada cor. Prove

que os cubos podem ser posicionados sobre uma mesa opaca, de forma tal que as faces inferiores formem o bordo de um quadrado 6×6 e o que número de faces brancas visíveis dos cubos seja igual ao número de faces pretas visíveis dos cubos.

Para o problema a seguir o leitor necessitará utilizar o seguinte fato, a ser provado na proposição 1.32 de [14]: para $a, b \in \mathbb{N}$, temos

$$ab = \text{mdc}\,(a, b)\,\text{mmc}\,(a, b).$$

12. (Torneio das Cidades.) Em uma lousa, vários inteiros positivos estão escritos. Uma operação permitida é apagar dois números distintos, dentre os escritos, e escrever, no lugar deles, seu mdc e seu mmc. Prove que, após repetirmos um número finito de vezes essa operação, os números escritos não mudam mais, não importando que operações adicionais fizermos.

CAPÍTULO 5

Introdução à Teoria dos Grafos

Consideremos, inicialmente, as seguintes situações combinatórias:

Situação 1: em uma festa com 100 convidados, há um número par de pessoas que conhecem, na festa, uma quantidade ímpar de outras pessoas.

Situação 2: um país tem 10 cidades e 37 estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga duas cidades distintas e cada duas cidades são ligadas por, no máximo, uma estrada. Nessas condições, é possível, usando as estradas, viajar entre duas cidades quaisquer do país (passando, possivelmente, por cidades intermediárias).

Situação 3: um polígono regular de 100 lados está desenhado no plano e todas as suas diagonais estão traçadas. Se escolhermos aleatoria-

mente 2501 lados ou diagonais do polígono e os pintarmos de vermelho, então, necessariamente, formaremos um triângulo com lados vermelhos e tendo por vértices três dos vértices do polígono.

Em que pese a aparente falta de correlação, em todos os problemas descritos acima temos certos conjuntos de objetos (convidados, cidades ou vértices) e relações entre tais objetos (conhecimento, existência de estrada ou cor do segmento, conforme o caso), o que nos permite analisá-los em um mesmo contexto abstrato, a *Teoria dos Grafos*. Nesse contexto, concentramo-nos no fato de dois objetos serem ou não relacionados, sem prestar atenção particular aos tipos específicos de objetos ou relações entre os mesmos.

É o propósito deste capítulo desenvolver os aspectos mais básicos da Teoria dos Grafos, estabelecendo, dentre outros, o teorema de Euler sobre a caracterização da existência dos caminhos hoje conhecidos como *Eulerianos*, o teorema de Cayley sobre o número de árvores rotuladas sobre um conjunto dado de vértices e o teorema extremal de Turán sobre a existência de subgrafos completos em um grafo conexo finito de certo tamanho. Aproveitamos para referir o leitor a [23] ou [54] para introduções consideravelmente mais abrangentes.

5.1 Conceitos básicos

Neste capítulo, salvo menção em contrário, todos os conjuntos sob consideração são finitos. Dado um conjunto não vazio A, denotamos por $\mathcal{P}_2(A)$ a família dos subconjuntos de A com dois elementos:

$$\mathcal{P}_2(A) = \{B \subset A;\ |B| = 2\}.$$

Em particular,

$$\#\mathcal{P}_2(A) = \binom{|A|}{2}.$$

Definição 5.1. *Um* **grafo** (**simples**) *é um par* $G = (V; E)$, *onde* V *é um conjunto finito e não vazio e* $E \subset \mathcal{P}_2(V)$. *Os elementos do conjunto* $V(G) := V$ *são os* **vértices** *do grafo* G, *ao passo que os elementos da família* $E(G) := E$ *são as* **arestas**[1] *de* G.

Se $G = (V; E)$ é um grafo e u e v são dois de seus vértices, diremos que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**) se $\{u, v\} \in E$; neste caso, diremos ainda que a aresta $\{u, v\}$ **incide** nos vértices u e v. Sempre que não houver perigo de confusão, denotaremos a aresta $\{u, v\}$ simplesmente por uv ou vu. Se u e v não forem adjacentes, diremos que são vértices **não adjacentes** de G.

Para muitos propósitos, é conveniente representar um grafo $G = (V; E)$ por um diagrama, onde os elementos de V correspondem a pontos no plano e as arestas de G correspondem a *arcos* ligando os vértices correspondentes. Bem entendido, a figura assim obtida não tem nenhum significado geométrico, seu propósito sendo somente o de representar esquematicamente as relações de adjacência entre os vértices de G. Por exemplo, se

$$G = (\{a, b, c, d\}; \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}),$$

então G pode ser representado por um qualquer dos diagramas abaixo, haja vista que ambos encerram as mesmas relações de adjacência.

Teremos mais a dizer sobre isso quando estudarmos, mais adiante, a noção de *isomorfismo de grafos*.

Exemplo 5.2. *Dado um conjunto* V *com* n *elementos e um grafo* $G = (V; E)$, *os dois casos extremos na definição 5.1 são aqueles em que* $E = \emptyset$ *ou* $E = \mathcal{P}_2(V)$. *No primeiro caso, dizemos que* $G = (V; \emptyset)$ *é o* **grafo trivial** *com* n *vértices, o qual pode ser representado por um conjunto de* n *pontos no plano, sem quaisquer arcos. No segundo caso,*

[1] O uso da letra E para denotar a família das arestas de G deriva da palavra inglesa para aresta, *edge*.

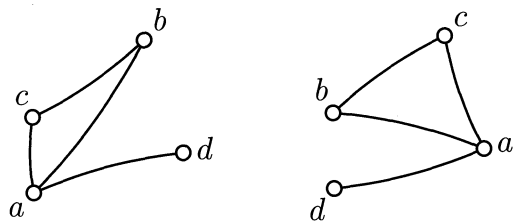



Figura 5.1: representações de um grafo.

G é o **grafo completo** *com n vértices, o qual também pode ser representado por um conjunto de n pontos no plano, dois quaisquer deles conectados por um arco. Doravante, denotaremos o grafo completo com n vértices por K_n; em particular, note que K_n tem exatamente $\binom{n}{2}$ arestas.*

Voltando à noção de adjacência, fixado um vértice u de $G = (V; E)$, denotamos por $N_G(u)$ o conjunto dos vértices adjacentes (ou vizinhos) a u:

$$N_G(u) = \{v \in V;\ uv \in E\}^2.$$

Definição 5.3. *Seja $G = (V; E)$ um grafo. Se $u \in V$, o* **grau**[3] *de u, denotado $d_G(u)$, é o número de vértices adjacentes a u:*

$$d_G(u) = \#N_G(u).$$

Observação 5.4. *Sempre que o grafo $G = (V; E)$ estiver subentendido, denotaremos o grau de $u \in V$ por $d(u)$ e o conjunto dos vizinhos de u por $N(u)$.*

Estamos, agora, em condições de enunciar o mais básico resultado em Teoria dos Grafos, devido ao matemático suiço Leonhard Euler.

[2] O uso da letra N, associada ao conjunto dos vizinhos do vértice u, deriva da palavra inglesa para vizinho, *neighbor*.

[3] O uso da letra d, associadao ao grau do vértice u, deriva da palavra inglesa para grau, *degree*.

Teorema 5.5 (Euler). *Em um grafo $G = (V; E)$, a soma dos graus dos vértices é sempre igual ao dobro do número de arestas. Em símbolos:*

$$2|E| = \sum_{u \in V} d_G(u). \tag{5.1}$$

Prova. Utilizemos contagem dupla. Basta observar que, se $\epsilon = \{u, v\}$ é uma aresta de G, então ϵ é contada exatamente duas vezes no segundo membro de (5.1): uma vez na parcela $d_G(u)$ e outra vez na parcela $d_G(v)$. Portanto, o segundo membro de (5.1) tem que ser igual a $2|E|$, já que tal número também conta cada aresta de G exatamente duas vezes. □

O corolário a seguir, também devido a Euler, é a mais importante consequência do teorema anterior.

Corolário 5.6 (Euler). *Em um grafo qualquer, o número de vértices de grau ímpar é par.*

Prova. Seja $G = (V; E)$ um grafo e, para $k \geq 0$ inteiro, seja $v_k(G)$ o número de vértices de G com grau k. Uma vez que a soma no segundo membro de (5.1) tem exatamente $v_k(G)$ parcelas iguais a k, temos (novamente por contagem dupla) a igualdade

$$\sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{k \geq 0} k v_k(G). \tag{5.2}$$

Segue, pois, do teorema de Euler que

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{u \in V} d_G(u) = \sum_{k \geq 0} k v_k(G) \\ &= \sum_{j \geq 0} (2j+1) v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j v_{2j}(G) \\ &= \sum_{j \geq 0} v_{2j+1}(G) + \sum_{j \geq 1} 2j (v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)). \end{aligned}$$

Logo,
$$\sum_{j\geq 0} v_{2j+1}(G) = 2|E| - \sum_{j\geq 1} 2j(v_{2j}(G) + v_{2j+1}(G)),$$
um número par. □

Exemplo 5.7. *Antes da reunião de um comitê, alguns de seus dez membros trocaram apertos de mãos. É possível que os números de apertos de mãos tenham sido, em alguma ordem, iguais a* 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7 *e* 8*?*

Prova. Considere os membros do comitê como os vértices de um grafo, onde dois vértices são adjacentes se as pessoas correspondentes tiverem trocado um aperto de mãos. Então, caso a situação descrita no enunciado possa ter ocorrido, os graus dos vértices do grafo seriam, em alguma ordem, iguais a 1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7 e 8. Mas isso contradiria o corolário anterior, uma vez que teríamos um número ímpar de vértices de grau ímpar. Logo, tal situação não pode ter ocorrido. □

A definição a seguir torna precisa a noção apropriada de equivalência para grafos.

Definição 5.8. *Dois grafos $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ são* **isomorfos** *se existir uma bijeção $f : V_1 \to V_2$ que preserva incidência, i.e., tal que, para vértices distintos quaisquer u e v de G, tenhamos*
$$\{u, v\} \in E_1 \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$
Nesse caso, denotamos $G_1 \simeq G_2$.

É imediato, a partir da definição anterior, que dois grafos isomorfos têm quantidades iguais de vértices. Por outro lado, o problema 4 garante que, para cada $n \in \mathbb{N}$, a noção de isomorfismo de grafos induz uma relação de equivalência (cf. discussão à seção 2.3) no conjunto dos grafos de n vértices.

A proposição a seguir dá outras condições necessárias para dois grafos serem isomorfos.

Proposição 5.9. *Dois grafos isomorfos têm quantidades iguais de vértices de um mesmo grau. Em particular, têm quantidades iguais de arestas.*

Prova. Sejam $G = (V_1; E_1)$ e $H = (V_2; E_2)$ grafos isomorfos e $f : V_1 \to V_2$ uma bijeção que preserva incidência. Se u é um vértice de G com grau $k > 0$, tal que $N_G(u) = \{u_1, \ldots, u_k\}$, então é imediato que $N_H(f(u)) = \{f(u_1), \ldots, f(u_k)\}$; em particular, $f(u)$ é um vértice de H com grau k. Uma observação análoga garante que, se u tem grau 0, o mesmo vale para $f(u)$.

Uma vez que o argumento do parágrafo anterior é simétrico em G e H (aqui, estamos usando o fato de que isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência), concluímos que os grafos G e H têm, para todo $k \geq 0$, quantidades iguais de vértices de grau k.

Para o que falta, apliquemos o teorema de Euler duas vezes: como $d_G(u) = d_H(f(u))$, para todo $u \in V_1$, e f é uma bijeção entre os conjuntos de vértices de G e H, obtemos
$$2|E_1| = \sum_{u\in V_1} d_G(u) = \sum_{u\in V_1} d_H(f(u)) = \sum_{f(u)\in V_2} d_H(f(u)) = 2|E_2|.$$
Logo, $|E_1| = |E_2|$. □

Exemplo 5.10. *Se $G = (V; E)$ é um grafo de n vértices, podemos, sempre que necessário, supor que $V = I_n$. De fato, como $|V| = n$, podemos escolher uma bijeção $f : V \to I_n$ e definir $H = (I_n; F)$ pondo, para $i \neq j$ em I_n,*
$$\{i, j\} \in F \Leftrightarrow \{f^{-1}(i), f^{-1}(j)\} \in E.$$

O exemplo anterior nos permite introduzir outra representação bastante útil de um grafo, qual seja, sua *matriz de adjacência*. Nesse sentido, sempre que conveniente, assumimos doravante que o leitor conheça os conceitos básicos sobre matrizes, os quais podem ser revisados no capítulo 4 de [17], por exemplo.

Definição 5.11. *Dado um grafo $G = (V; E)$, com $|V| = n$, suponha, de acordo com o exemplo anterior, que $V = I_n$. A* **matriz de adjacência** *de G é a matriz* $\text{Adj}(G) = (a_{ij})_{n \times n}$, *tal que*

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i \neq j\ e\ \{i, j\} \in E \\ 0, & senão \end{cases}.$$

Lema 5.12. *A matriz de adjacência de um grafo é simétrica, com zeros na diagonal principal.*

Prova. Nas notações da definição anterior, temos, para $i \neq j$ em I_n, que

$$a_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{i, j\} \in E \Leftrightarrow \{j, i\} \in E \Leftrightarrow a_{ji} = 1;$$

portanto, $\text{Adj}(G)$ é simétrica. O resto é imediato a partir da definição. □

Observação 5.13. *Dado um grafo $G = (V; E)$, diremos por vezes que G é* **rotulado**, *uma alusão ao fato de que seus vértices têm* nomes, *ou* rótulos. *A noção de isomorfismo de grafos permite introduzir o conceito de grafo* não rotulado. *Mais precisamente, se V é um conjunto com n elementos e $\mathcal{G}$ é o conjunto dos grafos que têm V como conjunto de vértices, então, conforme mencionamos anteriormente, a restrição da relação de isomorfismo de grafos a $\mathcal{G}$ induz uma relação de equivalência em $\mathcal{G}$; um* **grafo não rotulado** *com n vértices é uma classe de equivalência de $\mathcal{G}$, em relação a essa relação de equivalência. Salvo menção em contrário, consideraremos, nestas notas, somente grafos rotulados, omitindo em geral o adjetivo "*rotulado*".*

Terminamos esta seção examinando o importante conceito de *subgrafo* de um grafo.

Definição 5.14. *Um grafo H é um* **subgrafo** *de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G)$. O grafo H é um* **subgrafo gerador** *de G se H for um subgrafo de G tal que $V(H) = V(G)$.*

Os exemplos a seguir mostram como construir dois tipos fundamentais de subgrafos de um grafo dado.

Exemplo 5.15. *Dados um grafo $G = (V; E)$ e $\epsilon \in E$, o subgrafo de G obtido por* **excisão da aresta** *ϵ é o grafo $H = (V; E \setminus \epsilon)$. Doravante, denotaremos tal subgrafo de G simplesmente por $G - \epsilon$. Em palavras, o subgrafo $G - \epsilon$ é obtido de G* apagando *a aresta ϵ. Note, ainda, que $G - \epsilon$ é um subgrafo gerador de G.*

Exemplo 5.16. *Dados um grafo $G = (V; E)$ e $u \in V$, o subgrafo de G obtido por* **excisão do vértice** *u é o grafo $H = (V \setminus \{u\}; E')$, onde*

$$E' = E \setminus \{\epsilon \in E;\ \epsilon\ incide\ em\ u\}.$$

Doravante, denotaremos tal subgrafo de G simplesmente $G - u$. Em palavras, o subgrafo $G - u$ é obtido de G apagando *o vértice u e todas as arestas nele incidentes. Note, ainda, que $G - u$ tem um vértice a menos e $d_G(u)$ arestas a menos que G.*

Problemas – Seção 5.1

1. Justifique a afirmação feita na *Situação* 1 do início deste capítulo.

2. Prove que todo grafo tem pelo menos dois vértices com um mesmo grau.

3. Dados grafos $G_1 = (V_1; E_1)$ e $G_2 = (V_2; E_2)$, com $|V_1| = |V_2|$, prove que G_1 e G_2 são isomorfos se, e somente se, $\text{Adj}(G_2)$ pode ser obtida de $\text{Adj}(G_1)$ por meio de uma permutação de linhas.

4. * Prove que a relação de isomorfismo de grafos é uma relação de equivalência no conjunto dos grafos.

5. Calcule o número de grafos (rotulados) com vértices $u_1, \ldots, u_n$.

6. Prove que não existe um grafo de sete vértices, com graus 1, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, em alguma ordem.

7. Dê exemplo de um grafo de oito vértices, com graus 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5 e 6 em alguma ordem.

8. * Se $G = (V; E)$ é um grafo, seu **grafo complementar** é o grafo $\overline{G} = (V; E^c)$, onde E^c denota o complementar de E em $\mathcal{P}_2(V)$. Se $|V| = n$, prove que:

   (a) $d_G(u) + d_{\overline{G}}(u) = n - 1$, para todo $u \in V$.

   (b) $|E| + |E^c| = \binom{n}{2}$.

9. Um grafo é **autocomplementar** se for isomorfo a seu complementar. Se G é um grafo autocomplementar com n vértices, prove que n deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 4.

10. * Generalize os exemplos 5.15 e 5.16. Mais precisamente, dado um grafo $G = (V; E)$ e $\emptyset \neq B \subsetneq V$, $\emptyset \neq A \subset E$, defina os subgrafos $G - B$ e $G - A$ de G, obtidos, respectivamente, pela excisão dos vértices em B e das arestas em A.

11. * Dados um grafo G e um subconjunto A de $V(G)$, o subgrafo de G **induzido** por A é o grafo $G_{|A} = (A; E')$, onde

$$E' = \{\{u, v\} \in E;\ u, v \in A\}.$$

   Prove que:

   (a) Para $u \in V(G)$, temos $G - u = G_{|V(G)\setminus\{u\}}$.

   (b) $G_{|A} = G - A^c$, onde A^c denota o complementar de A em $V(G)$ e $G - A^c$ é definido como no problema anterior.

12. Seja $G = (V; E)$ um grafo. Escolhemos dois vértices não adjacentes de G, digamos u e v, e adicionamos a E a aresta $\{u, v\}$, obtendo, assim, um novo grafo $H = (V; F)$. Prove que a diferença entre a quantidade de vértices de grau ímpar em H e em G é -2, 0 ou 2. Em seguida, use esse fato para dar uma nova prova do corolário 5.6.

Para o problema a seguir, o leitor pode achar conveniente recordar a discussão sobre a relação de congruência módulo n, feita à seção 2.3.

13. * Dados inteiros $1 \leq n < m$, seja $G(m, n) = G(I_m; E)$ o grafo tal que, para $1 \leq i, j \leq m$, temos

$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow j \equiv i \pm n (\operatorname{mod} m).$$

   (a) Represente $G(m, n)$ quando $m = 6$ e n varia de 1 a 5.

   (b) Se $m = 2n$, prove que todo vértice tem grau 1 e $|E| = n$; represente o grafo assim obtido.

   (c) Se $m \neq 2n$, prove que todo vértice tem grau 2 e $|E| = m$.

   (d) Prove que $G(m, n) \simeq G(m, m - n)$.

   $G(m, n)$ é denominado o **grafo** (m, n)**−estrelado**.

14. * Nas notações do problema anterior, represente o grafo obtido a partir dos grafos $G(5, 1)$ e $G(5, 2)$ ligando, para $1 \leq i \leq 5$, o vértice i de $G(5, 1)$ ao vértice $2i$ de $G(5, 2)$. O grafo assim obtido é denominado **grafo de Petersen**.

Para o problema a seguir, dizemos que um subconjunto não vazio A do conjunto de vértices de um grafo G é **independente** se dois vértices quaisquer de A não forem adjacentes em G.

15. * Um grafo $G = (V; E)$ é **bipartido** se pudermos escrever $V = V_1 \cup V_2$, onde V_1 e V_2 são conjuntos disjuntos, não vazios e independentes. Prove que $|E| \leq |V_1| \cdot |V_2|$, com igualdade se, e só se, todo vértice de V_1 for adjacente a algum vértice de V_2, e vice-versa.

16. * Nas notações do problema anterior, um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2; E)$ é **completo** se $|E| = |V_1| \cdot |V_2|$. Se $H = (W_1 \cup W_2; F)$ for outro grafo bipartido completo, prove que

$$G \simeq H \Leftrightarrow |V_1| = |W_1| \text{ e } |V_2| = |W_2|, \text{ ou vice-versa.}$$

Graças ao resultado desse problema, se $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$, denotamos o grafo bipartido completo $G = (V_1 \cup V_2; E)$ simplesmente por $K_{m,n}$.

17. * Nas notações do problema 15, sejam $V_1 = \{1, \ldots, m\}$ e $V_2 = \{m+1, \ldots, m+n\}$. Prove que a matriz de adjacência de G tem a forma

$$\text{Adj}(G) = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^\top & 0 \end{bmatrix},$$

onde A é uma matriz $m \times n$ e $A^\top$ denota a matriz transposta de A.

18. Um grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2; E)$, com conjuntos independentes V_1 e V_2, tem 16 vértices de grau 5 e alguns (pelo menos um) vértices de grau 8. Se todos os vértices de grau 8 pertencem a V_1, calcule quantos vértices de grau 8 o grafo G pode ter.

19. * Um grafo G é **r−regular** se todos os vértices de G têm grau r.

    (a) Se G é um grafo r−regular com n vértices, prove que $2 \mid nr$ e que G tem exatamente $\frac{nr}{2}$ arestas.

    (b) Dados naturais n e r, tais que $r < n$ e nr é par, mostre como construir um grafo r−regular com n vértices.

20. Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas as patrulhas eram formadas por um mesmo número de homens. Por outro lado, cada homem participava de exatamente duas patrulhas e cada duas patrulhas tinham exatamente um homem em comum. Calcule o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

21. Seja $G = (V_1 \cup V_2; E)$ um grafo bipartido, tal que $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$. Sabe-se que todos os vértices de V_1 têm grau g, todos os vértices de V_2 têm grau 2 e $|N(u) \cap N(v)| = 1$, para todos $u, v \in V_1$.

    (a) Calcule g e n em função de m.

    (b) Para os valores de g e n calculados em (a), construa um grafo satisfazendo as condições do enunciado.

22. (Japão.) Em uma competição de Matemática, participaram x estudantes e foram propostos $2y$ problemas. Cada estudante resolveu y problemas e cada problema foi resolvido por um mesmo número de estudantes; além disso, cada dois estudantes resolveram exatamente três problemas em comum. Calcule todos os possíveis pares (x, y) e, para cada um de tais pares, exiba uma configuração mostrando que problemas cada estudante resolveu.

23. (Hungria.) Prove que é impossível dispor os números 1, 2, 3, ..., 13 ao redor de um círculo de modo tal que, para dois números vizinhos quaisquer x e y, tenhamos $3 \leq |x - y| \leq 5$.

24. (Brasil.) Considere um tabuleiro $n \times n$, $n > 1$ inteiro, e escolha uma casa qualquer c_0 do mesmo. Um *caminho* no tabuleiro é uma sequência $(c_0, c_1, \ldots, c_m)$ de casas distintas tais que, para

todo $j \geq 1$, as casas c_j e c_{j+1} são vizinhas (i.e., têm um lado em comum). Tal caminho é dito *ótimo* se contiver todas as casas do tabuleiro. Além disso, dizemos que um caminho contém um U se, para algum $j \geq 1$, as casas c_j e c_{j+3} forem vizinhas. Mostre que todo caminho ótimo contém um U.

Para o problema a seguir, definimos um **grafo dirigido** ou **digrafo**[4] como um grafo G tal que associamos uma *orientação* a cada uma de suas arestas (a qual pode ser pensada como uma seta indicando o sentido de percurso da aresta[5]). Para um vértice u de um digrafo G, definimos seu **grau de saída** $d^+_G(u)$ como o número de arestas que *partem* de u; analogamente, o **grau de entrada** de u, denotado $d^-_G(u)$, é o número de arestas que *chegam* em u, de maneira que

$$d_G(u) = d^+_G(u) + d^-_G(u)$$

é o grau de u em G, pensado como grafo ordinário (i.e., aquele obtido ao removermos as orientações de suas arestas).

Se um digrafo contém um K_3, então tal K_3 é **transitivo** ou **cíclico**, conforme as situações descritas respectivamente à esquerda e à direita, na figura 5.2. Um digrafo G é **completo** ou um **torneio** se for um grafo completo quando removemos as orientações de suas arestas.

25. * Se G é um digrafo completo com n vértices, faça os seguintes itens:

(a) Prove que $\sum_{u \in V} d^+(u) = \binom{n}{2}$, onde V é o conjunto dos vértices de G e escrevemos $d^+(u)$ em vez de $d^+_G(u)$, por

[4]Do Inglês *directed graph.*

[5]Mais formalmente, em um digrafo as arestas são pares ordenados (u, v), com $u, v \in V(G)$ distintos; ademais, se (u, v) for aresta, então (v, u) não o é.

Figura 5.2: K_3 transitivo (esq.) e cíclico (dir.).

simplicidade de notação.

(b) Prove que o grau de saída médio dos vértices de G é $\overline{d}^+ = \frac{n-1}{2}$.

(c) Prove que o número de K_3 transitivos em G é $\sum_{u \in V} \binom{d^+(u)}{2}$.

(d) Prove que o número de K_3 cíclicos em G é

$$\binom{n}{3} + \frac{1}{2}\binom{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{u \in V} d^+(u)^2.$$

(e) Conclua, a partir do item (d), que o número de K_3 cíclicos em G também é dado por

$$\frac{n(n^2-1)}{24} - \sum_{u \in V}(d^+(u) - \overline{d}^+)^2 \leq$$

$$\leq \begin{cases} n(n^2-1)/24, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n(n^2-4)/24, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}.$$

26. (Japão.) Catorze pessoas disputam um campeonato de xadrez onde todos jogam contra todos e não há empates. Calcule o maior número possível de conjuntos de três jogadores tais que, nos jogos entre eles, cada um ganhou uma partida e perdeu uma partida.

5.2 Passeios, caminhos e ciclos

Nesta seção estudamos, dentre outros, o problema de decidir se um grafo G tem *um só pedaço.*

Definição 5.17. *Um* **passeio** *de* **comprimento** $k \geq 1$ *em um grafo* G *é uma sequência*

$$\mathcal{P} = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$$

de vértices (não necessariamente distintos) de G*, tal que* u_{i-1} *é adjacente a* u_i*, para* $1 \leq i \leq k$*. Um passeio* $\mathcal{P}$ *como acima é* **fechado** *se* $u_0 = u_k$.

Os grafos que queremos qualificar são aqueles nos quais dois vértices quaisquer participam de um passeio. Mais precisamente, temos a seguinte definição importante.

Definição 5.18. *Um grafo é* **conexo** *se existir um passeio entre dois quaisquer de seus vértices. Um grafo que não é conexo é dito* **desconexo**.

À guisa de ilustração, a proposição a seguir dá um critério simples (suficiente, mas, obviamente, não necessário) para um grafo ser conexo. Para o enunciado da mesma, precisamos introduzir uma notação e uma nomenclatura que também serão úteis posteriormente: dado um grafo $G = (V; E)$, o **grau mínimo** de G é o inteiro não negativo

$$\delta(G) = \min\{d_G(u);\ u \in V(G)\}. \tag{5.3}$$

Proposição 5.19. *Se* G *é um grafo com* n *vértices e tal que* $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$*, então* G *é conexo.*

Prova. Se $n = 1$, nada há a fazer. Se $n = 2$, então $\delta(G) = 1$ e, daí, os dois vértices de G são adjacentes. Suponha, pois, que $n > 2$, e sejam u e v vértices distintos de G. Caso u e v sejam adjacentes, nada há a fazer. Do contrário, como

$$d_G(u) + d_G(v) \geq 2\lfloor n/2 \rfloor > n - 2 = \#(V(G) \setminus \{u, v\}),$$

o princípio da casa dos pombos garante a existência de um vértice $w \neq u, v$, adjacente a ambos u e v. Logo, o passeio (u, w, v) liga u a v. □

Fixado um grafo G, é imediato verificar que a relação $\sim$ em $V(G)$, definida por

$$u \sim v \Leftrightarrow\ u = v \text{ ou existe em } G \text{ um passeio ligando } u \text{ a } v, \tag{5.4}$$

é de equivalência. Note, ainda, que uma classe de equivalência de $V(G)$ com respeito a tal relação é, em particular, um conjunto de vértices de G.

Para o que segue, o leitor pode achar conveniente revisar a noção de *subgrafo induzido* por um conjunto de vértices, cf. problema 11, página 164.

Definição 5.20. *As* **componentes conexas** *de um grafo* G *são os subgrafos* $G_{|A}$ *de* G*, induzidos pelas classes de equivalência* A *de* $V(G)$ *com respeito à relação de equivalência* (5.4).

Se A é uma classe de equivalência de vértices de G com respeito à relação (5.4), então, em particular, há um passeio entre dois vértices distintos quaisquer de A, de maneira que $G_{|A}$ é um grafo conexo. Por outro lado, se H é um subgrafo conexo de G contendo $G_{|A}$, então $H = G_{|A}$; de fato, se $u \in V(H)$ e $v \in A \subset V(H)$, então a conexidade de H garante a existência de um passeio em H (e, portanto, em G) ligando u a v; logo, $u \in A$, pelo fato de A ser uma classe de equivalência de vértices em relação à existência de passeios. Temos, pois, que $A \subset V(H) \subset A$ e, daí, $H = G_{|A}$. Assim, podemos afirmar que

as componentes conexas de um grafo são exatamente seus *subgrafos conexos maximais*.

Voltando à análise dos passeios de um grafo, colecionamos, a seguir, mais uma definição relevante.

Definição 5.21. *Um* **passeio Euleriano** *em um grafo conexo é um passeio fechado que usa cada aresta do grafo exatamente uma vez. Um grafo conexo é* **Euleriano** *se contiver um passeio Euleriano.*

Seja G um grafo Euleriano e $\mathcal{P}$ um passeio Euleriano em G. Fixado arbitrariamente um vértice u de G, se $k \geq 1$ é o número de ocorrências de u em $\mathcal{P}$, então é claro que $d_G(u) = 2k$, um número par. Portanto, uma condição necessária para que um grafo conexo G seja Euleriano é que todos os vértices de G tenham grau par. O teorema 5.23 a seguir garante que tal condição também é suficiente para um grafo ser Euleriano. Antes de apresentar sua demonstração, precisamos de um resultado auxiliar importante.

Lema 5.22. *Se G é um grafo conexo e não trivial, no qual todo vértice tem grau par, então G contém um passeio fechado que não atravessa uma mesma aresta duas vezes.*

Prova. Escolha um vértice u_0 de G e, a partir de u_0, crie um passeio em G repetindo, enquanto possível, o seguinte algoritmo: estando em um vértice u_{k-1} de G, $k \geq 1$, escolha um vértice u_k adjacente a u_{k-1} e tal que a aresta $u_{k-1}u_k$ ainda não tenha sido atravessada (em nenhum sentido).

Para mostrar que esse algoritmo gera um passeio fechado em G que não atravessa uma mesma aresta duas vezes, suponha que, após a execução de um certo número de passos (pelo menos um passo) estejamos em um vértice u_k de G. Há, então, duas possibilidades:

(i) $u_k = u_0$: nada há a fazer, pois o passeio desejado é $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$.

(ii) $u_k \neq u_0$: suponha que o vértice u_k já apareceu (com índices menores) outras l vezes; então, utilizamos exatamente $2l + 1$ dentre as arestas incidentes em u_k (duas arestas para cada uma das l ocorrências anteriores, mais uma aresta para chegar em u_k, a partir de u_{k-1}). Mas, como u_k tem grau par, existe pelo menos uma aresta incidente em tal vértice e que ainda não foi utilizada; portanto, o algoritmo não para em u_k.

Por fim, como o número de arestas de G é finito, a discussão acima garante que o algoritmo para em u_0 e, ao parar, teremos um passeio fechado em G que não atravessa uma mesma aresta duas vezes. □

Podemos finalmente provar o resultado prometido.

Teorema 5.23 (Euler). *Um grafo conexo e não trivial G é Euleriano se, e só se, todos os seus vértices têm grau par.*

Prova. Já vimos, no parágrafo anterior ao lema 5.22, que, se G é Euleriano, então todos os seus vértices têm grau par. Para estabelecer a recíproca, façamos indução em relação ao número de arestas de G.

A condição do enunciado implica que G tem pelo menos três arestas; ademais, se G tiver exatamente três arestas, então é imediato mostrar que G é isomorfo a K_3, o qual é claramente Euleriano.

Suponha, agora, que G tem $n > 3$ arestas, e que o teorema é verdadeiro para grafos conexos com menos de n arestas, nos quais todos os vértices têm grau par. Pelo lema anterior, podemos tomar em G um passeio fechado $\mathcal{P} = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_0)$, que não atravessa uma mesma aresta duas vezes. Se A é o conjunto das arestas de $\mathcal{P}$, sejam $H_1, \ldots, H_l$ as componentes conexas não triviais de $G - A$ (cf. problema 10, página 164). Se um vértice u de H_i ocorre $j \geq 0$ vezes em $\mathcal{P}$, então

$$d_G(u) = d_{H_i}(u) + 2j,$$

de modo que $d_{H_i}(u)$ é par. Como isso é válido para todos $1 \leq i \leq l$ e $u \in V(H_i)$, segue que $H_1, \ldots, H_l$ satisfazem as hipóteses do teorema.

Como cada H_i tem menos arestas que G, segue da hipótese de indução a existência de um passeio Euleriano $\mathcal{P}_i$ para H_i, para $1 \leq i \leq l$. A ideia, agora, é *colar* os passeios Eulerianos $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_l$, um a um, a $\mathcal{P}$, obtendo, assim, um passeio Euleriano para G. Para tanto, note que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ têm pelo menos um vértice comum, digamos u. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}_1$ começam e terminam em u (mudando os pontos de partida de ambos esses passeios fechados, se necessário). Portanto, seguindo $\mathcal{P}$ e, subsequentemente, $\mathcal{P}_1$, obtemos um passeio $\mathcal{P}'_1$ em G, o qual engloba todas as arestas de $\mathcal{P}$ e de $\mathcal{P}_1$ e não passa duas vezes por uma mesma aresta. Basta, agora, repetir o argumento acima mais $l-1$ vezes, colando $\mathcal{P}_2$ a $\mathcal{P}'_1$ para obter um passeio $\mathcal{P}'_2$ e assim por diante. O passeio $\mathcal{P}'_l$, obtido ao final desse processo, é um passeio Euleriano em G. □

O teorema anterior, provado por L. Euler em 1735, marca o nascimento da Teoria dos Grafos. Euler chegou até ele após ser inquirido por um conhecido sobre a possibilidade de realizar um passeio pelas ruas da cidade prussiana de Königsberg (hoje a cidade russa de Kaliningrado), atravessando exatamente uma vez cada uma das sete pontes que havia, à época, sobre o rio Pregel, que corta a cidade.

Levando em conta que as pontes em questão unem duas ilhas do rio Pregel ao restante da cidade, Euler modelou o problema em questão como a possibilidade de encontrar, no grafo da figura 5.3, um passeio do tipo que hoje chamamos de *Euleriano*. Em que pese o fato de tal grafo não ser simples (repare que, nele, há *arestas múltiplas* ligando dois vértices, situação que, por simplicidade, não admitimos em nossa apresentação da teoria), um pouco de reflexão convencerá facilmente o leitor de que o resultado do teorema anterior permanece verdadeiro para *grafos conexos não simples*. Portanto, tal resultado garante que é impossível realizar um passeio Euleriano em tal grafo, haja vista que

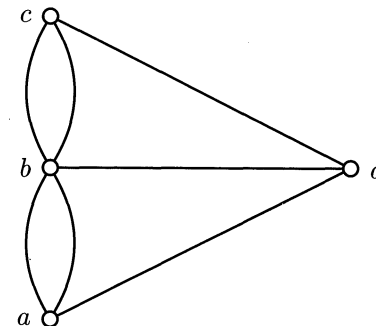



Figura 5.3: grafo representativo das pontes de Königsberg.

todos os seus vértices têm grau ímpar.

De volta à discussão geral da teoria, terminamos esta seção estudando os conceitos de *caminhos* e *ciclos* em grafos, bem como algumas aplicações relevantes dos mesmos.

Definição 5.24. *Um* **caminho** *em um grafo é um passeio tal que todos os seus vértices são distintos.*

Apesar de todo caminho ser um passeio, é imediato que, em geral, há passeios que não são caminhos. No entanto, não é difícil nos convencermos (cf. problema 7) de que, se há um passeio entre dois vértices de um grafo, então também há um caminho entre os mesmos.

Definição 5.25. *Um* **k−ciclo** *em um grafo G é um passeio fechado*

$$(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_0)$$

em G, de comprimento $k \geq 3$ e tal que $(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$ é um caminho.

A proposição a seguir utiliza o conceito de ciclo para caracterizar os grafos bipartidos (cf. problema 15, página 166).

Proposição 5.26. *Um grafo G é bipartido se, e só se, todo ciclo em G tem comprimento par.*

Prova. Suponhamos, inicialmente, que G é bipartido, com conjuntos independentes de vértices V_1 e V_2. Se $\mathcal{C} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_k, u_0)$ é um ciclo em G, então a independência dos conjuntos V_1 e V_2 garante que os vértices u_i e u_{i+1} alternam-se entre os conjuntos V_1 e V_2. Em particular, o caminho $(u_0, u_1, \ldots, u_k)$ dá k alternâncias entre V_1 e V_2 para, partindo de u_0, chegarmos a u_k. Mas, como u_k e u_0 são adjacentes, não podem pertencer a um mesmo dos conjuntos V_1 ou V_2 e, daí, k deve ser ímpar. Portanto, o comprimento $k+1$ de C é par.

Reciprocamente, suponha que todo ciclo em G tenha comprimento par e mostremos que G é bipartido fazendo indução sobre seu número de arestas. Se G contiver algum ciclo $\mathcal{C}$, retire uma aresta $\epsilon = \{u, v\}$ de $\mathcal{C}$. Como não foram criados novos ciclos, $G - \epsilon$ ainda é tal que todos os seus ciclos têm comprimento par. Portanto, pela hipótese de indução, $G - \epsilon$ é bipartido, com conjuntos independentes de vértices V_1 e V_2, digamos. Mostremos que V_1 e V_2 também são independentes em G; Para tanto, note que o caminho $\mathcal{C} - \epsilon$ em $G - \epsilon$ liga u a v e tem comprimento ímpar; uma vez que seus vértices se alternam entre V_1 e V_2, segue que $u \in V_1$ e $v \in V_2$, ou vice-versa. Logo, V_1 e V_2 também são independentes em G, de sorte que G também é bipartido. □

A definição a seguir, devida ao matemático, físico e astrônomo irlandês do século XIX William R. Hamilton, é, de certa forma, dual à definição de passeio Euleriano.

Definição 5.27. *Um* **ciclo Hamiltoniano** *em um grafo é um ciclo que passa por todos os vértices do grafo. Um grafo conexo é* **Hamiltoniano** *se contiver um ciclo Hamiltoniano.*

Nem todo grafo conexo é Hamiltoniano; por exemplo, qualquer grafo sem ciclos não é Hamiltoniano (para exemplos mais interessantes, veja o exemplo 5.29 ou o problema 20).

O problema da existência ou não de ciclos Hamiltonianos em grafos é muito mais difícil do que o problema correspondente para passeios Eulerianos; de fato, até hoje não existe um conjunto de condições necessárias e suficientes simples para um grafo ser Hamiltoniano. O teorema a seguir, devido ao matemático húngaro do século XX Gabriel Dirac, dá uma condição suficiente simples para a existência de ciclos Hamiltonianos em um grafo. Para o enunciado do mesmo, o leitor pode achar útil rever a definição de grau mínimo de um grafo, em (5.3), página 170.

Teorema 5.28 (Dirac). *Se G é um grafo com $n \geq 3$ vértices e tal que $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, então G é Hamiltoniano.*

Prova. Pela proposição 5.19, G é conexo. Agora, seja $\mathcal{P} = (u_0, \ldots, u_k)$ um caminho maximal em G (i.e., tal que não há outro de comprimento maior). Se v for um vizinho de u_0 que não pertence a $\mathcal{P}$, podemos trocar $\mathcal{P}$ por $\mathcal{P}_1 = (v, u_0, \ldots, u_k)$, obtendo um caminho maior do que $\mathcal{P}$, o que é uma contradição. Portanto, $\mathcal{P}$ inclui todos os vizinhos de u_0 e, analogamente, todos os vizinhos de u_k. Em particular, $\mathcal{P}$ tem comprimento maior ou igual a $\frac{n}{2}$.

Afirmamos que existe um índice $0 \leq i \leq k-1$ tal que u_0 é adjacente a u_{i+1} e u_i é adjacente a u_k. Para tanto, sejam $A = \{0 \leq i \leq k-1;\ u_{i+1} \in N_G(u_0)\}$ e $B = \{0 \leq i \leq k-1;\ u_i \in N_G(u_k)\}$; como todos os vértices em $N_G(u_0)$ e todos os vértices em $N_G(u_k)$ estão em $\mathcal{P}$, segue que $|A|, |B| \geq \frac{n}{2}$. Como $|A \cup B| \leq k$, segue que

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq n - k > 0,$$

uma vez que $\mathcal{P}$ é um caminho em G com $k+1$ vértices.

Tome, então, $0 \leq i \leq k-1$ como na afirmação, e considere o ciclo

$$\mathcal{C} = (u_0, u_{i+1}, u_{i+2}, \ldots, u_{k-1}, u_k, u_i, u_{i-1}, \ldots u_1, u_0).$$

Afirmamos que $\mathcal{C}$ é Hamiltoniano. Por contradição, suponha que algum vértice de G, digamos v, não esteja em $\mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ tem mais

de $\frac{n}{2}$ vértices e v tem pelo menos $\frac{n}{2}$ vizinhos, o princípio da casa dos pombos garante a existência de um vértice w em $\mathcal{C}$, o qual é adjacente a v. Renomeando os vértices de $\mathcal{C}$, podemos supor que

$$\mathcal{C} = (v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0),$$

com $v_0 = w$; mas aí, $\mathcal{P}_1 = (v, v_0, v_1, \ldots, v_k)$ seria um caminho maior do que $\mathcal{P}$ em G, o que é um absurdo. □

A condição sobre $\delta(G)$ exigida pelo teorema de Dirac é a melhor possível, no sentido do exemplo a seguir.

Exemplo 5.29. *Se $n > 1$ é ímpar e G é o grafo de n vértices formado pela união de duas cópias de $K_{(n+1)/2}$ com um único vértice comum, digamos u, então é claro que $\delta(G) = \frac{n-1}{2} < \frac{n}{2}$. No entanto, G não possui um ciclo Hamiltoniano, uma vez que qualquer ciclo em G, contendo u, deve estar contido em uma das cópias de $K_{(n+1)/2}$. De fato, se $\mathcal{C}$ for um tal ciclo, então $\mathcal{C} - u$ é um subgrafo conexo de $G - u$, que, por sua vez, é a união disjunta de duas cópias de $K_{(n-1)/2}$; logo, $\mathcal{C} - u$ está contido em uma dessas cópias de $K_{(n-1)/2}$ e, daí, $\mathcal{C}$ está contido em uma das cópias de $K_{(n+1)/2}$ que compõem G.*

Terminamos esta seção utilizando a matriz de adjacência de um grafo para contar o número de 3−ciclos do mesmo. Para tanto, lembre-se de que, dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n, seu determinante $\det(A)$ pode ser calculado recursivamente com o auxílio da **fórmula de Laplace**[6]: fixado $1 \leq i \leq n$, temos

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \det(\widetilde{A}_{ij}),$$

onde A_{ij} é a matriz $(n-1) \times (n-1)$, obtida de A pela exclusão da linha i e da coluna j.

[6]Após Pierre Simon de Laplace, matemático francês dos séculos XVIII e XIX.

Dados inteiros $1 \leq k \leq n$ e $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, seja $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$. Definimos o **menor principal** de ordem k da matriz A como a matriz $[A]_I$, quadrada de ordem k, formada pela escolha dos elementos de A situados nas posições (i_j, i_l). Mais precisamente, sendo $[A]_I = (\alpha_{jl})$, temos $\alpha_{jl} = a_{i_j i_l}$, para todos $1 \leq j, l \leq k$.

Exemplo 5.30. *Se G é um grafo com matriz de adjacência A de ordem n, então o número de 3−ciclos em G é dado por*

$$\frac{1}{2} \sum_{I} \det\left([A]_I\right),$$

onde a soma varia sobre todos os subconjuntos I de três elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Prova. Um menor principal de ordem 3 de A é uma matriz 3×3 da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix},$$

com $a, b, c \in \{0, 1\}$. Portanto, um cálculo imediato (com o auxílio da fórmula de Laplace, por exemplo) garante que

$$\det \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

e que, nesse caso, o determinante em questão vale 2.

Agora, é suficiente observar que, se $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é o conjunto dos vértices de G e $I = \{i_1, i_2, i_3\}$, com $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n$, então

$$[A]_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3} \text{ são dois a dois adjacentes.}$$

□

Problemas – Seção 5.2

1. Para este problema, lembre-se de que, se $X = (x_{ij})_{m\times n}$ e $Y = (y_{jk})_{n\times p}$ são matrizes com entradas x_{ij} e y_{jk}, então a matriz produto de X por Y é a matriz $XY = (z_{ik})_{m\times p}$ tal que, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq k \leq p$, tem-se

$$z_{ik} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}y_{jk}. \tag{5.5}$$

   (a) Se A é a matriz de adjacência de um grafo G de vértices $v_1, \ldots, v_n$, use a fórmula acima para provar que, para $i \neq j$, a entrada ij da matriz A^2 é igual ao número de caminhos de comprimento 2 em G, ligando os vértices v_i e v_j.

   (b) Generalize (5.5), mostrando que se $X_1, \ldots, X_k$ são matrizes $n \times n$, com $X_l = (x^l_{ij})_{n\times n}$, então a matriz-produto de X_1, $\ldots$, X_k é a matriz $X_1 \ldots X_k = (y_{ij})_{n\times n}$, tal que

$$y_{ij} = \sum_{l_1,\ldots,l_k} x^1_{il_1}x^2_{l_1l_2}\cdots x^{k-1}_{l_{k-2}l_{k-1}}x^k_{l_{k-1}j},$$

   onde os índices $l_1, \ldots, l_k$ variam, na soma acima, sobre todas as possibilidades $1 \leq l_1, \ldots, l_k \leq n$.

   (c) Se A é como no item (b) e $k \geq 1$ é um inteiro, prove que a entrada ij da matriz A^k é igual ao número de passeios de comprimento k em G, ligando os vértices v_i e v_j.

2. Dados um grafo G e um vértice u de G, seja $H = (V; E)$, onde V é o conjunto dos vértices de todos os caminhos em G que partem de u e E é o conjunto formado pelas arestas desses caminhos. Prove que H é a componente conexa de G que contém u.

3. Prove que todo grafo com n vértices e pelo menos $\binom{n-1}{2} + 1$ arestas é conexo. Dê exemplo de um grafo com n vértices e $\binom{n-1}{2}$ arestas que não seja conexo.

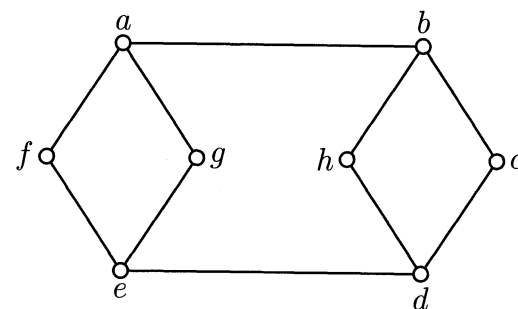
4. Analise a *Situação* 2 descrita no início deste capítulo.

Para o problema a seguir, você precisará do seguinte fato, a ser provado na proposição 1.25 de [14]: dados inteiros não nulos m, n e c, existem inteiros x e y tais que $c = mx + ny$ se, e só se, mdc(m, n) divide c.

5. Em relação ao grafo $(m, n)-$estrelado $G(m, n)$, descrito no problema 13, página 165, seja $d =$ mdc(m, n). Prove que $G(m, n)$ tem exatamente mdc$(m, n) = d$ componentes conexas.

6. Mostre que, se um grafo G é desconexo, então seu complementar $\overline{G}$ (cf. problema 8, página 164) contém um subgrafo bipartido completo com o mesmo conjunto de vértices de G. Conclua, a partir daí, que G ou $\overline{G}$ é conexo.

7. * Se há um passeio entre dois vértices de um grafo, prove que há também um caminho entre os mesmos.

8. Ache um passeio Euleriano no grafo esboçado na figura abaixo.

9. Um **passeio semi-Euleriano** em um grafo conexo G é um passeio que começa e termina em vértices distintos de G e atravessa cada aresta de G uma única vez. Prove que G possui um passeio semi-Euleriano se, e só se, G possui exatamente dois vértices de graus ímpares.

10. Prove que, em todo grafo conexo, dois caminhos cujos comprimentos são os maiores possíveis têm pelo menos um vértice em comum.

11. Um grafo G tem $n+2$ vértices, $u_1, u_2, \ldots, u_n, v, w$, e satisfaz as seguintes condições: v e w são ambos adjacentes a $u_1, \ldots, u_n$, mas não são adjacentes um ao outro; $u_1, \ldots, u_n$ são dois a dois adjacentes. Calcule o número de caminhos, em G, de comprimento $2 \leq k \leq n+1$ e ligando v a w.

12. Se todos os vértices de um grafo têm graus maiores ou iguais a 2, prove que o grafo contém um ciclo.

13. Prove que todo grafo 2−regular (cf. problema 19, página 166) é um ciclo.

14. (Torneio das Cidades.) Durante uma conferência, cada um de cinco matemáticos dormiu exatamente duas vezes. Sabe-se também que, para cada par desses matemáticos, houve um momento em que ambos dormiam. Prove que, em algum momento, três dos matemáticos estavam dormindo.

15. (IMO.) Seja G um grafo conexo com k arestas. Prove que é possível rotular as arestas com os inteiros de 1 a k, de tal modo que o mdc dos rótulos atribuídos às arestas incidentes em cada vértice de grau maior que 1 seja igual a 1.

16. Uma aresta ϵ de um grafo G é dita uma **aresta de corte** se $G - \epsilon$ tiver mais componentes conexas que G. Se G é um grafo conexo e ϵ é uma aresta de corte de G, prove que $G - \epsilon$ tem exatamente duas componentes conexas.

Para o problema a seguir, dados um digrafo G (veja o parágrafo que precede o problema 25, página 168) e dois de seus vértices, u e v digamos, um **passeio** (orientado) de u a v em G, é uma sequência $(u_0, \ldots, u_k)$ de vértices de G tais que $u_0 = u$, $u_k = v$ e há uma aresta orientada de u_i para u_{i+1}, para $0 \leq i < k$. Nesse caso, dizemos que o comprimento do passeio é k. Um **caminho** é um passeio com vértices distintos. Por fim, recorde que um **digrafo completo** ou **torneio** é um digrafo que é um grafo completo quando removemos as orientações de suas arestas.

17. Em um torneio G, mostre que existe um vértice u tal que, para qualquer outro vértice v de G, existe um caminho de u a v de comprimento no máximo 2.

18. (Torneio das Cidades.) Em Shvambrania há n cidades, cada duas das quais conectadas por uma estrada. Essas estradas não se intersectam; se necessário, algumas delas passam sobre ou sob outras por viadutos. Um mago perverso estabelece mão única em cada uma das estradas, de tal modo que, se alguém sai de uma certa cidade, não pode mais a ela voltar. Prove que:
    (a) É possível estabelecer tais regras.
    (b) Qualquer que seja o modo de se estabelecer tais regras, sempre haverá uma cidade a partir da qual é possível chegar em qualquer outra e uma cidade da qual não se pode sair.
    (c) O mago pode realizar seu intento de exatamente $n!$ modos diferentes.

19. (Tchecoslováquia.) Prove que, em todo grafo conexo, existe um vértice tal que o grau médio de seus vizinhos é maior ou igual que o grau médio de todos os vértices do grafo.

20. O propósito deste problema é provar que o grafo de Petersen (cf. o problema 14, página 165) não é Hamiltoniano. Para tanto, suponha, por contradição, que tal grafo possua um ciclo Hamiltoniano $\mathcal{C}$. Nas notações da figura 5.4, faça os seguintes itens:

(a) Prove que $\mathcal{C}$ contém duas ou quatro das arestas $\{a, a'\}$, $\{b, b'\}$, $\{c, c'\}$, $\{d, d'\}$, $\{e, e'\}$.

(b) Se quatro das arestas de (a) estão em $\mathcal{C}$, suponha, sem perda de generalidade, que $\{b, b'\}$ é aquela que não está em $\mathcal{C}$. Conclua que $\{a', b'\}$, $\{b', c'\}$, $\{b, e\}$ e $\{b, d\}$ estão em $\mathcal{C}$ e chegue, daí, a uma contradição.

(c) Se duas das arestas de (a) estão em $\mathcal{C}$, suponha, sem perda de generalidade, que $\{a, a'\}$ seja uma delas. Conclua que exatamente uma das arestas $\{a, c\}$ ou $\{a, d\}$ está no ciclo, digamos $\{a, c\}$. Se $\{a, c\}$ está em $\mathcal{C}$, conclua que a outra aresta de (a) que está em $\mathcal{C}$ é $\{d, d'\}$ e, a partir daí, chegue a uma contradição.

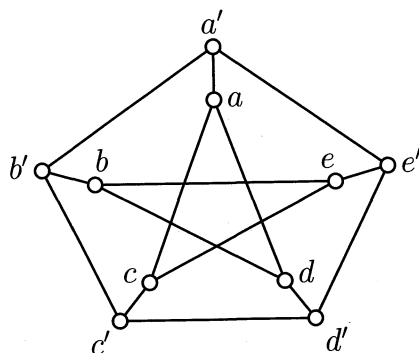



Figura 5.4: o grafo de Petersen.

21. Sejam k e n inteiros tais que $2 < k < n$. Se $f(n, k)$ denota o maior número possível de K_k's em K_n, tais que dois quaisquer desses K_k's têm no máximo $k - 2$ vértices comuns, prove que

$$\frac{1}{k^2}\binom{n}{k-1} < f(n, k) \leq \frac{1}{k}\binom{n}{k}.$$

22. (Vietnã.) Encontre, com justificativa, o menor inteiro positivo k para o qual exista um grafo de 25 vértices tal que todo vértice é adjacente a exatamente k outros e dois vértices não adjacentes sejam ambos adjacentes a um terceiro vértice.

23. (Áustria-Polônia.) Um prédio retangular é formado por duas fileiras de quinze salas quadradas (situadas como as casas em duas fileiras adjacentes de um tabuleiro de xadrez). Cada sala tem uma, duas ou três portas, que levam respectivamente a uma, duas ou três salas adjacentes. Sabendo que as portas são distribuídas de tal modo que é sempre possível ir de uma sala a qualquer outra sem deixar o prédio, pede-se calcular quantas distribuições distintas das portas satisfazem tais condições.

5.3 Árvores

Nesta seção, estudamos os grafos que não possuem ciclos, também ditos **acíclicos**. A definição relevante é aquela dada a seguir.

Definição 5.31. *Uma* **árvore** *é um grafo conexo e acíclico.*

Se T é uma árvore[7], uma **folha** de T é um vértice de grau 1 e um **nó** de T é um vértice de grau maior que 1. É um fato importante que toda árvore tem folhas, conforme ensina o seguinte resultado auxiliar.

Lema 5.32. *Toda árvore com mais de um vértice tem pelo menos duas folhas.*

Prova. Seja T uma árvore com pelo menos dois vértices e considere, em T, um caminho $\mathcal{C}$ com o maior comprimento possível. Se $\mathcal{C} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, afirmamos que u_1 e u_n são folhas. De fato, se fosse

[7] O uso da letra T para denotar uma árvore genérica deriva da palavra inglesa para árvore, *tree*.

$d_T(u_1) \geq 2$, então u_1 seria adjacente a u_2 e a um outro vértice, u_0 digamos. Como árvores não contêm ciclos, deve ser $u_0 \neq u_3, \ldots, u_n$. Daí, o caminho $(u_0, u_1, u_2 \ldots, u_n)$ teria comprimento maior do que o de $\mathcal{C}$, o que é um absurdo. Logo, $d_T(u_1) = 1$ e, analogamente, $d_T(u_n) = 1$. □

A proposição a seguir dá uma condição necessária (a qual mostraremos logo mais ser suficiente) para um grafo conexo ser uma árvore.

Proposição 5.33. *Se $T = (V; E)$ é uma árvore, então $|E| = |V| - 1$.*

Prova. Façamos indução sobre $|V|$. Inicialmente, é claro que toda árvore com dois vértices tem exatamente uma aresta. Suponha, por hipótese de indução, que toda árvore com $n > 1$ vértices tem exatamente $n - 1$ arestas, e considere uma árvore T com $n + 1$ vértices. Pelo lema anterior, T tem uma folha u; portanto, $T - u$ é uma árvore com n vértices, e a hipótese de indução garante que $T - u$ tem $n - 1$ arestas. Mas, como T tem exatamente uma aresta a mais que $T - u$, segue que T tem exatamente n arestas. □

Corolário 5.34. *Se $G = (V; E)$ é um grafo conexo, então G contém pelo menos um ciclo se, e só se, $|E| \geq |V|$.*

Prova. Suponha, inicialmente, que G contém pelo menos um ciclo, e mostremos que $|E| \geq |V|$ por indução sobre $|E|$. Se ϵ é uma aresta de um ciclo em G, então $G - \epsilon$ ainda é conexo e tem $|V|$ vértices e $|E| - 1$ arestas. Há, pois, duas possibilidades:

- $G - \epsilon$ ainda contém pelo menos um ciclo: segue da hipótese de indução que $|E| - 1 \geq |V|$;
- $G - \epsilon$ é acíclico: como ainda é conexo, $G - \epsilon$ é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|V| = (|E| - 1) + 1 = |E|$.

Em qualquer caso, $|E| \geq |V|$.

Reciprocamente, se G for acíclico, então G é uma árvore, e a proposição anterior garante que $|E| = |V| - 1 < |V|$. □

Corolário 5.35. *Seja $T = (V; E)$ um grafo conexo. Se $|E| = |V| - 1$, então T é uma árvore.*

Prova. Se T contivesse pelo menos um ciclo, seguiria do corolário anterior que $|E| \geq |V|$, o que é uma contradição. Logo, T é conexo e acíclico, logo, uma árvore. □

Para o que segue, dado um grafo conexo G, associe a cada aresta ϵ de G um **peso**[8], i.e., um número real positivo $w(\epsilon)$ (em aplicações, os vértices do grafo podem ser diversas localidades em uma região e os pesos podem representar os custos de viagem entre duas localidades adjacentes no grafo resultante). Dessa forma, G se torna um **grafo com pesos** e o **peso** $w(G)$ de G é definido por

$$w(G) = \sum_{\epsilon \in E} w(\epsilon),$$

onde $E = E(G)$.

Dado um grafo conexo G, uma **árvore geradora** de G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore. Um problema interessante na teoria elementar de árvores é o seguinte: dado um grafo com pesos, obter uma árvore geradora com peso mínimo, dita uma **árvore geradora minimal**. Resolvemos esse problema na proposição a seguir, devida ao matemático americano Joseph Kruskal. Bem entendido, como o conjunto das árvores geradoras de um grafo é finito (e não vazio, como veremos a seguir), sempre existem árvores geradoras minimais de um grafo com pesos. A importância da prova da proposição a seguir é o fato de a mesma fornecer um algoritmo para a obtenção de

[8]O uso da letra w para denotar pesos deriva da palavra inglesa para peso, *weight*.

uma árvore geradora minimal. Tal algoritmo é conhecido em Ciência da Computação como **algoritmo de Kruskal** ou **guloso**.

Proposição 5.36 (Kruskal). *Se G é um grafo com pesos, então G possui árvores geradoras minimais.*

Prova. Formemos um subgrafo T de G de acordo com o seguinte algoritmo:

(i) Escolha uma aresta de G com peso mínimo e a coloque em T.
(ii) Após escolhermos um certo número de arestas de G para T, tome, dentre as arestas de G ainda não escolhidas, uma de peso mínimo e cuja inclusão em T não gere um ciclo.
(iii) Repita a etapa anterior enquanto possível.

Inicialmente, veja que o algoritmo acima dá como resultado uma árvore geradora T. De fato, certamente o subgrafo resultante T é uma árvore; se não fosse geradora, existiria em G um vértice u não pertencente a T mas adjacente a algum vértice v de T. Sem perda de generalidade, podemos supor que u e v são tais que $w(\{u,v\})$ é mínimo, dentre todos os u e v como acima. Portanto, o algoritmo continuaria com a inclusão da aresta $\{u,v\}$, o que é um absurdo.

Seja, agora, S outra árvore geradora de G e mostremos que $w(T) \leq w(S)$. Como S e T têm um mesmo número de arestas (cf. problema 3), existe uma aresta ϵ de T tal que ϵ não está em S. Novamente pelo problema 3, a inclusão de ϵ em S gera um ciclo $\mathcal{C}$ em S; mas, como T é árvore, existe alguma aresta ϵ' em $\mathcal{C}$ (e, portanto, em S), mas não em T.

Afirmamos que $w(\epsilon) \leq w(\epsilon')$. De fato, se $w(\epsilon) > w(\epsilon')$, então, na execução do algoritmo, na etapa em que ϵ foi escolhido deveríamos ter escolhido ϵ', a qual tem peso menor; mas, como ϵ' não está em T, temos uma contradição.

Como $w(\epsilon) \leq w(\epsilon')$, trocando ϵ' por ϵ em S, obtemos uma nova árvore geradora S_1, tal que $w(S_1) \leq w(S)$ e S_1 e T têm uma aresta a mais em comum do que S e T. Se T tem k arestas que não estão em S, então, repetindo o argumento acima mais $k-1$ vezes, obtemos uma sequência $S_1, S_2, \ldots, S_k$ de árvores geradoras tais que $S_k = T$ e

$$w(S_k) \leq \cdots \leq w(S_1) \leq w(S).$$

Logo, $w(T) \leq w(S)$. □

Finalizamos esta seção contando o número de árvores rotuladas (cf. observação 5.13) com um certo conjunto de vértices, resultado devido ao matemático inglês do século XIX Arthur Cayley.

Teorema 5.37 (Cayley). *Há exatamente n^{n-2} árvores (rotuladas) de n vértices.*

Prova. A fórmula do enunciado é trivialmente verdadeira para $n = 1$ e $n = 2$. Suponha $n > 2$ e, sem perda de generalidade, que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são os vértices das árvores que queremos contar. Seja a_n o número das mesmas. Para $1 \leq i \leq n$, se A_i é o conjunto das árvores com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ e tais que v_i é uma folha, então o princípio da inclusão-exclusão (cf. teorema 2.1) garante que

$$\begin{aligned} a_n &= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} (-1)^{k-1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|, \end{aligned}$$

uma vez que, para $n > 2$, não há árvore com n vértices tal que todos eles sejam folhas.

Fixado $1 \leq k \leq n$ e inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, o conjunto $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ é formado pelas árvores que têm os vértices $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ por folhas. Se T é uma de tais árvores, então

$$T_{i_1 i_2 \ldots i_k} := T - \{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}\}$$

é uma árvore rotulada com $n-k$ vértices; por outro lado, para $1 \leq j \leq k$, cada vértice v_{i_j} deve se ligar a um dos $n-k$ vértices de $T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, de maneira que há $(n-k)^k$ possíveis escolhas dos vértices de $T_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ aos quais os vértices $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}$ devem se ligar. Portanto,

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^k a_{n-k}.$$

Mas, como há $\binom{n}{k}$ modos de escolhermos k inteiros $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, segue que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^k a_{n-k}.$$

Suponha, por hipótese de indução, que $a_l = l^{l-2}$, para $1 \leq l < n$. Então, a recorrência acima nos dá

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-2}.$$

Agora, aplicando a fórmula do problema 2, página 55, com $m = n-2$, obtemos

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)^{n-2} = n^{n-2}.$$

□

Problemas – Seção 5.3

1. * Prove que as seguintes afirmações sobre um grafo G são equivalentes:

   (a) G é uma árvore.

   (b) Há um único caminho em G ligando quaisquer dois de seus vértices.

   (c) G é conexo e toda aresta de G é uma aresta de corte (cf. o problema 16, página 182).

   Conclua que, em uma árvore com n vértices, há exatamente $\binom{n}{2}$ caminhos distintos.

2. Se uma árvore T tem um nó de grau k, prove que T tem pelo menos k folhas.

3. * Seja G um grafo conexo.

   (a) Prove que duas árvores geradoras de G têm um mesmo número de arestas.

   (b) Se T é uma árvore geradora de G e ϵ é uma aresta de G que não está em T, prove que $T \cup \{\epsilon\}$ contém ciclos.

   (c) Se G possui uma única árvore geradora, prove que G é uma árvore.

   (d) Se T é uma árvore geradora de G e G tem k arestas que não são arestas de T, prove que G tem pelo menos k ciclos.

4. Prove que o algoritmo a seguir também constrói árvores geradoras minimais de grafos com pesos:

   i. Escolha um vértice e a aresta de menor peso nele incidente.

   ii. Após escolhidos certo número de vértices e arestas, escolha a aresta de menor peso ainda não escolhida e ligando um vértice já escolhido a um vértice ainda não escolhido.

   iii. Repita o item anterior enquanto possível.

   O algoritmo acima é devido ao matemático holandês Edsger Dijkstra, sendo conhecido como o **algoritmo de Dijkstra**.

5. Seja G um grafo com conjunto de vértices $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ e com pesos nas arestas dados pela tabela de pesos

ab	ac	ad	ae	af	ag	bc	bg	cd	de	ef	fg
6	3	2	4	3	7	6	6	2	3	1	8

Encontre todas as árvores geradoras de peso mínimo.

Para o próximo problema, utilizaremos o fato, demonstrado no problema 1, de que uma árvore com n vértices contém exatamente $\binom{n}{2}$ caminhos distintos.

6. Seja T uma árvore com n vértices, satisfazendo a seguinte condição: é possível associar, a cada uma das $n-1$ arestas de T, um peso natural, de tal forma que os $\binom{n}{2}$ caminhos possíveis em T apresentem, em alguma ordem, pesos iguais a 1, 2, ..., $\binom{n}{2}$. O objetivo deste problema é provar que, nesse caso, n ou $n-2$ deve ser um quadrado perfeito. Para tanto, faça os seguintes itens:

   (a) Mostre que o número de caminhos em T com peso ímpar é
$$\begin{cases} \frac{1}{2}\binom{n}{2}, \text{ se } \binom{n}{2} \text{ é par} \\ \\ \frac{1}{2}\left(\binom{n}{2}+1\right), \text{ se } \binom{n}{2} \text{ é ímpar} \end{cases}.$$

   (b) Mostre que é possível pintar os vértices de T de azul ou vermelho, de tal modo que dois vértices adjacentes têm cores distintas se, e só se, a aresta que os une tiver peso ímpar.

   (c) Se a coloração do item (b) gerar x vértices azuis e y vértices vermelhos, mostre que o número de caminhos em T com peso ímpar é igual a xy.

   (d) Se $\binom{n}{2}$ é par, conclua que $n = (x-y)^2$; se $\binom{n}{2}$ é ímpar, conclua que $n - 2 = (x-y)^2$.

5.4 Conjuntos independentes e cliques

Esta seção é devotada a um estudo um tanto mais detalhado dos subgrafos completos de um grafo dado, e é parcialmente baseada em [26].

Dado um grafo G, lembre-se de que um subconjunto não vazio A de $V(G)$ é dito **independente**, se dois vértices quaisquer em A forem não adjacentes. Se G tem n vértices, podemos particionar $V(G)$ em n conjuntos (cada conjunto consistindo de um único vértice) tais que cada um deles seja independente. Existe, então, um menor natural k tal que $V(G)$ pode ser particionado em k conjuntos independentes. Tal natural recebe um nome particular, de acordo com a definição a seguir.

Definição 5.38. *Dado um grafo G, o* **número cromático** *de G, denotado $\mathcal{X}(G)$, é o menor natural k tal que o conjunto dos vértices de G pode ser particionado em k conjuntos independentes.*

A razão da palavra *cromático*, na definição anterior, se deve ao fato de que, se $\mathcal{X}(G) = k$ e $V(G) = A_1 \cup \ldots \cup A_k$, com $A_1, \ldots, A_k$ conjuntos independentes, então, pintando os vértices em A_i com a cor c_i (onde $c_1, \ldots, c_k$ são cores distintas), obtemos uma coloração dos vértices de G na qual dois vértices adjacentes quaisquer têm cores distintas; reciprocamente, se k é o menor número de cores distintas tal que existe uma coloração dos vértices de G com k cores e sem vértices adjacentes de uma mesma cor, então os conjuntos formados pelos vértices de uma mesma cor são k conjuntos independentes que particionam $V(G)$.

Exemplos 5.39.

(a) Se G é um grafo bipartido (cf. problema 15, página 166) com pelo menos uma aresta, é imediato que $\mathcal{X}(G) = 2$.

(b) Se G é um 2−ciclo com n vértices, então é claro que $\mathcal{X}(G) = 2$, se n é par (podemos colorir os vértices usando duas cores alternadamente), mas $\mathcal{X}(G) = 3$, se n é ímpar (nesse caso, necessitamos de uma terceira cor para o último vértice do ciclo).

Generalizando o item (b) do exemplo acima, descrevemos a seguir um algoritmo bastante simples, o qual garante que se nenhum vértice de um grafo tem grau maior que k, então seu número cromático é, no máximo, $k+1$. Para o que segue, dado um grafo G, denotamos

$$\Delta(G) = \max\{d_G(u);\ u \in V(G)\},$$

e dizemos que $\Delta(G)$ é o **grau máximo** em G.

Proposição 5.40. *Em todo grafo G, temos $\mathcal{X}(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Prova. Seja $\Delta(G) = n$ e fixe $n+1$ cores distintas. Comece pintando um vértice qualquer de G com uma das cores. Suponha que, em algum momento, já pintamos $k < n$ vértices de G, de modo tal que vértices adjacentes têm cores distintas. Escolha um vértice u ainda não pintado. Como $d_G(u) \leq \Delta(G) = n$, no máximo n cores foram usadas para pintar vértices adjacentes a u; portanto, ainda resta pelo menos uma cor, dentre as $n+1$ fixadas, para pintar u, de forma tal que u tenha uma cor distinta das cores de seus vizinhos. □

A definição a seguir fornece uma cota inferior para o número cromático de um grafo.

Definição 5.41. *Um* **n−clique** *em um grafo G é um subgrafo de G isomorfo a K_n. O* **número-clique** *de G, denotado $\omega(G)$, é o maior inteiro $n \geq 0$ tal que G contém um n−clique*[9].

[9]Não confunda as notações $w(G)$ para o peso de um grafo com pesos e $\omega(G)$ para o número-clique de um grafo; a primeira usa a letra latina w, ao passo que a segunda usa a letra grega ω (lê-se *ômega*).

Uma vez que são necessárias n cores para colorir os vértices de K_n de tal forma que não haja vértices adjacentes de uma mesma cor, temos que

$$\mathcal{X}(G) \geq \omega(G),$$

para todo grafo G. Por outro lado, podemos estimar $\omega(G)$ com base na intuição de que, se um grafo tiver muitas arestas (em relação a seu número de vértices), então $\omega(G)$ deve ser grande. Vejamos um exemplo relevante.

Exemplo 5.42. *Seja G um grafo conexo com n vértices, onde $n > 1$. Se G tiver mais de $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arestas, então $\omega(G) \geq 3$.*

Prova. Por contraposição, suponhamos que G não contém um K_3.

Seja u um vértice de G com grau máximo, k digamos. Podemos supor que $k > 1$, pois, do contrário, o teorema de Euler 5.5 nos daria, no máximo, $\frac{n}{2}$ arestas para G, o que contradiria o fato de que $\frac{n}{2} < \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor + 1$ para $n > 1$.

Como G não contém K_3, os k vértices de G adjacentes a u formam um conjunto independente. Logo, toda aresta de G, que não incide em u, incide em algum dos $n-k-1$ vértices não pertencentes a $N_G(u) \cup \{u\}$. Mas, como cada um desses $n-k-1$ vértices tem grau menor ou igual a k, segue que G possui, no máximo

$$k + (n-1-k)k = -k^2 + nk$$

arestas.

Por fim, basta observar que

$$\mathbb{Z} \ni -k^2 + nk \leq \frac{n^2}{4},$$

de maneira que deve ser $-k^2 + nk \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. □

O próximo exemplo ilustra a aplicabilidade de resultados como o encerrado pelo exemplo anterior.

Exemplo 5.43 (China). *Dados números reais distintos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, prove que há no máximo $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ pares ordenados (x_i, x_j) tais que $1 < |x_i - x_j| < 2$.*

Prova. Construa um grafo G tendo os x_i's por vértices, com x_i adjacente a x_j se, e só se, $1 < |x_i - x_j| < 2$. Afirmamos que G não contém K_3's. De fato, se x_i, x_j e x_k fossem os vértices de um K_3 em G, com $x_i < x_j < x_k$, digamos, então

$$x_k - x_i = (x_k - x_j) + (x_j - x_i) > 1 + 1 = 2,$$

o que é uma contradição. Portanto, pelo exemplo anterior, concluímos que G tem no máximo $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arestas. □

A fim de generalizar o argumento do exemplo 5.42, construamos, inicialmente, um exemplo genérico de grafo com n vértices e sem K_l's. Para tanto, divida n por $l - 1$, obtendo

$$n = (l - 1)q + r,$$

com $0 \leq r < l - 1$. Particione o conjunto de n vértices em $l - 1$ subconjuntos A_1, $A_2, \ldots$, A_{l-1}, tais que

$$|A_1| = \cdots = |A_r| = q + 1 \;\text{ e }\; |A_{r+1}| = \cdots = |A_{l-1}| = q$$

(tal é possível, pois $r(q + 1) + (l - r - 1)q = (l - 1)q + r = n$). Em seguida, imponha que cada A_i seja um conjunto independente, mas que cada vértice de A_i seja adjacente a todo vértice de A_j, para todos $i \neq j$. O grafo G assim obtido não contém K_l's, uma vez que o grau de cada vértice de G é $l - 2$, ao passo que o grau de cada vértice de um K_l é $l - 1$; por outro lado, contando quantas arestas de K_n deixamos de traçar para obter G, concluímos que G tem exatamente

$$\binom{n}{2} - r\binom{q+1}{2} - (l - r - 1)\binom{q}{2}$$

arestas. Substituindo $q = \frac{n-r}{l-1}$, concluímos, após um pouco de álgebra elementar, que G tem

$$T(n; l) := \frac{n^2(l - 2) - r(l - 1 - r)}{2(l - 1)} \tag{5.6}$$

arestas, mas $\omega(G) < l$.

O teorema a seguir, devido ao matemático húngaro Paul Turán (cf. [52]), garante que, a fim de que $\omega(G) < l$, a cota (5.6) é a melhor possível.

Teorema 5.44 (Turán). *Se um grafo G de n vértices tem mais que $T(n; l)$ arestas, então $\omega(G) \geq l$.*

Prova. Nas notações da discussão acima, façamos a prova por indução sobre q, supondo r e l fixados. Se $q = 0$, então $n = r$, e segue de (5.6) que

$$\begin{aligned} T(n; l) &= \frac{n^2(l - 2) - n(l - 1 - n)}{2(l - 1)} \\ &= \frac{n^2(l - 1) - n(l - 1)}{2(l - 1)} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} = \binom{n}{2}. \end{aligned}$$

O resultado é imediato por vacuidade, uma vez que G não pode ter mais do que $\binom{n}{2}$ arestas.

Agora, considere um grafo G com n vértices, sem K_l's e com o maior número possível de arestas. Claramente, G contém um K_{l-1}, pois, do contrário, poderíamos adicionar mais uma aresta a G e ainda não teríamos um K_l. Sejam H um K_{l-1} em G e A o conjunto dos $n - l + 1$ vértices restantes de G (que não os vértices de H). Há três tipos de arestas em G:

- as arestas de H: há, ao todo, $\binom{l-1}{2}$ de tais arestas.

- as arestas ligando vértices em A a vértices de H: como G não contém K_l's, cada um dos vértices em A está ligado a no máximo $l-2$ vértices de H, o que nos dá, no máximo, $(n-l+1)(l-2)$ arestas desse tipo.
- as arestas do subgrafo induzido $G_{|A}$ (cf. o problema 11, página 164): como $G_{|A}$ também não contêm K_l's e $n-l+1=(q-1)(l-1)+r$, podemos aplicar a hipótese de indução a $G_{|A}$, de maneira que $G_{|A}$ possui no máximo $T(n-l+1;l)$ arestas.

Logo, o grafo G tem, no máximo,

$$T(n-l+1;l)+(n-l+1)(l-2)+\binom{l-1}{2}$$

arestas. Por fim, substituindo a fórmula para $T(n-l+1;l)$, obtida a partir de (5.6), e executando um pouco de álgebra elementar, conseguimos

$$T(n-l+1;l)+(n-l+1)(l-2)+\binom{l-1}{2}=T(n;l),$$

de sorte que G tem, no máximo, $T(n;l)$ arestas. □

Terminamos esta seção examinando outro invariante de um grafo G, relacionado com $\omega(G)$.

Definição 5.45. *Dado um grafo G, o* **número de independência** *de G, denotado $\alpha(G)$, é o número de elementos de um subconjunto independente maximal de G.*

Para a proposição a seguir, o leitor pode achar útil lembrar o conceito de grafo complementar (cf. problema 8, página 164).

Proposição 5.46. *Sejam dados um grafo G e um subconjunto não vazio A do conjunto de vértices de G. O subgrafo de G induzido por*

A é um clique em G se, e só se, A é um subconjunto independente no grafo complementar de G. Em particular,

$$\omega(G)=\alpha(\overline{G}) \quad e \quad \omega(\overline{G})=\alpha(G).$$

Prova. A primeira parte é imediata a partir das definições; quanto à segunda parte, basta usar o fato de que $\overline{\overline{G}}=G$. □

Exemplo 5.47. *Seja G um grafo com nove vértices. Suponha que, dados quaisquer cinco vértices de G, existam pelo menos duas arestas com ambas as extremidades nesses cinco vértices. Calcule o menor número possível de arestas que G pode ter.*

Prova. Consideremos dois casos separadamente:

(a) $\omega(\overline{G})\geq 4$: fixe um K_4 em $\overline{G}$ e seja A o conjunto formado pelos vértices desse K_4. Então, A é independente em G e, se u é um qualquer dos cinco vértices restantes, a condição do enunciado garante que u é adjacente a pelo menos dois dos vértices em A. Logo, concluímos que G tem, pelo menos, $5\cdot 2=10$ arestas.

(b) $\omega(\overline{G})\leq 3$: pelo teorema de Turán, $\overline{G}$ tem no máximo $T(9;4)=27$ arestas e, daí, G tem pelo menos $\binom{9}{2}-27=9$ arestas.

Para um exemplo de G com 9 arestas, tome a união de três K_3's disjuntos. Dados cinco vértices em G, há duas possibilidades: ou três desses cinco vértices formam um dos K_3's que compõem G, ou escolhemos dois dos vértices de dois dos K_3's que compõem G, juntamente com um vértice do terceiro K_3. Em qualquer caso, há pelo menos duas arestas com ambas as extremidades nesses cinco vértices. □

Problemas – Seção 5.4

1. Se G é um grafo com pelo menos seis vértices, prove que $\omega(G) \geq 3$ ou $\omega(\overline{G}) \geq 3$.

2. As pessoas $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J formaram os seguintes oito comitês:

$$\begin{array}{llll} A,B,C,D & B,D,F,G & A,H,J & G,H,J \\ A,C,D,E & C,F,G,H & H,I,J & E,I \end{array}$$

   Cada comitê deve se reunir um dia inteiro, de modo que quaisquer dois comitês com pelo menos um membro em comum devem se reunir em dias distintos. Calcule o menor número possível de dias necessários.

3. O propósito deste problema é fornecer uma outra prova do resultado do exemplo 5.42 quando G é um grafo com $2n$ vértices, $n > 1$, e pelo menos $n^2 + 1$ arestas. Para tanto, fixe dois vértices adjacentes u e v de G e faça os seguintes itens[10]:

   (a) Se $d_G(u) + d_G(v) \geq 2n + 3$, use o princípio da casa dos pombos para garantir que G tem um K_3 da forma uvw.

   (b) Se $d_G(u)+d_G(v) \leq 2n+2$, encaixe uma hipótese de indução em $G - \{u, v\}$ (cf. problema 10, página 164) para concluir que tal grafo (e portanto G) contém um K_3.

4. Analise a *Situação* 3, descrita no início deste capítulo, à luz do problema anterior.

5. Seja G um grafo com 10 vértices e 26 arestas. Mostre que G deve ter pelo menos cinco K_3's.

[10]A prova delineada neste problema é devida ao matemático húngaro László Lovász.

6. (Torneio das Cidades.) Em um campeonato de futebol, participam vinte equipes. Qual é o número mínimo de partidas que deve ter o torneio para que, dentre quaisquer três equipes, haja duas que joguem entre si?

7. (Estados Unidos.) Em uma certa sociedade, cada par de pessoas é classificado como *amigável* ou *hostil.* Membros de pares amigáveis são ditos *amigos* e membros de pares hostis são ditos *adversários.* Suponha que a sociedade tem n pessoas, q pares amigáveis e que pelo menos um par em qualquer conjunto de três pessoas seja hostil. Prove que existe pelo menos um membro da sociedade cujo conjunto de adversários contêm, ao todo, não mais do que $q\left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ pares amigáveis.

8. Em um conjunto de n pessoas, sabe-se que em qualquer grupo de três pessoas há duas que se conhecem e em qualquer grupo de quatro pessoas há duas que não se conhecem. Calcule o maior valor possível de n.

9. Dados 21 pontos sobre um círculo, prove que existem pelo menos 100 arcos, cada um dos quais definido por dois desses 21 pontos, cujas medidas em graus são menores ou iguais a $120°$.

10. (Polônia.) Sejam dados n pontos sobre um círculo de raio 1. Mostre que há no máximo $\frac{n^2}{3}$ segmentos ligando pares desses pontos e tendo comprimentos maiores ou iguais a $\sqrt{2}$.

11. Seja G um grafo com n vértices, tal que $\omega(G) < k$, onde $k \geq 2$. Prove que G contém pelo menos $\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor$ vértices com graus menores ou iguais a $\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \rfloor$.

12. Um conjunto de 1001 pessoas é tal que cada subconjunto de 11 pessoas contém pelo menos dois indivíduos que se conhecem.

Mostre que existem pelo menos 101 pessoas no conjunto, tais que cada uma delas conhece pelo menos 100 pessoas no conjunto.

13. Seja A um subconjunto de 101 elementos de $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$. Prove que existem $x_1, x_2, \ldots, x_{100} \in S$ tais que, para $1 \leq j \leq 100$, os conjuntos $A_j = \{x + x_j;\ x \in A\}$ sejam dois a dois disjuntos.

CAPÍTULO 6

Soluções e Sugestões

Seção 1.1

1. Se existe uma bijeção $f : I_1 \to I_n$, mostre que $n = 1$. Suponha, pois, que $m, n > 1$ e existe uma bijeção $f : I_m \to I_n$. Pondo $k = f(m)$, mostre que existe uma bijeção $g : I_n \setminus \{k\} \to I_{n-1}$, de sorte que $g \circ f_{|I_{m-1}} : I_{m-1} \to I_{n-1}$ também é uma bijeção. Use um argumento indutivo para mostrar que $m - 1 = n - 1$.

2. Se $g : I_m \to A$ e $h : I_n \to B$ são bijeções, defina uma função $f : I_{m+n} \to A \cup B$ por

$$f(k) = \begin{cases} g(k), & \text{se } 1 \leq k \leq m \\ h(k-m), & \text{se } m+1 \leq k \leq m+n \end{cases}.$$

Como g e h são sobrejetivas e $m+1 \leq k \leq m+n$ se, e só se, $1 \leq k-m \leq n$, temos f também sobrejetiva. Para a injetividade, suponha que $f(k) = f(l)$, com $1 \leq k, l \leq m+n$. Há quatro casos a considerar:

- $1 \leq k, l \leq m$: então, $f(k) = f(l) \Rightarrow g(k) = g(l) \Rightarrow k = l$, pela injetividade de g.
- $m+1 \leq k, l \leq m+n$: então, $f(k) = f(l) \Rightarrow h(k-m) = h(l-m) \Rightarrow k-m = l-m \Rightarrow k = l$, pela injetividade de h.
- $1 \leq k \leq m$ e $m+1 \leq l \leq m+n$: então, $f(k) = f(l) \Rightarrow g(k) = h(l-m) \in A \cap B$, uma contradição ao fato de que A e B são disjuntos. Logo, nesse caso tem-se sempre $f(k) \neq f(l)$.
- $m+1 \leq k \leq m+n$ e $1 \leq l \leq m$: analogamente ao caso anterior, tem-se sempre $f(k) \neq f(l)$.

3. Por indução, se $k < n$ e $|\cup_{j=1}^{k} A_j| = \sum_{j=1}^{k} |A_j|$, então

$$\left|\cup_{j=1}^{k+1} A_j\right| = \left|\left(\cup_{j=1}^{k} A_j\right) \cup A_{k+1}\right| = \left|\cup_{j=1}^{k} A_j\right| + |A_{k+1}|$$
$$= \sum_{j=1}^{k} |A_j| + |A_{k+1}| = \sum_{j=1}^{k+1} |A_j|.$$

4. Façamos indução sobre $|A| = |B|$, sendo o caso $|A| = |B| = 1$ trivial. Suponha, por hipótese de indução, o resultado verdadeiro quando $|A| = |B| = n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e considere conjuntos A e B tais que $|A| = |B| = n+1$. Dados $x \in A$ e uma função $f : A \to B$, seja $f(x) = y$. Então, $|A \setminus \{x\}| = |B \setminus \{y\}| = n$ e f se restringe a uma função $g : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{y\}$. Por hipótese de indução, temos que g é injetiva se, e só se, é sobrejetiva. Mas, como f é injetiva (resp. sobrejetiva) se, e só se, g é injetiva (resp. sobrejetiva), segue que f é injetiva se, e só se, é sobrejetiva.

5. Se $(a, b) = (c, d)$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Se $a = b$, então $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$, de forma que $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ deve ter somente um elemento. Portanto, $c = d$ e $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$, de modo que $a = c$ e, então, $a = b = c = d$. O caso $a \neq b$ pode ser tratado de forma análoga.

6. Para a primeira parte, se $B = B_1 \cup \ldots \cup B_n$, $a \in A$ e $b \in B$, mostre que o par ordenado (a, b) pertence ao primeiro membros se, e só se, pertence ao segundo membro.

7. Por indução, se $k < n$ e $|A_1 \times \cdots \times A_k| = \prod_{j=1}^{k} |A_j|$, então

$$|A_1 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| = |(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}|$$
$$= |A_1 \times \cdots \times A_k| \cdot |A_{k+1}|$$
$$= \prod_{j=1}^{k} |A_j| \cdot |A_{k+1}| = \prod_{j=1}^{k+1} |A_j|.$$

Por fim, observe que a proposição 1.6 é o caso inicial.

8. Se $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, então, para $1 \leq i \leq n$ fixado, há k possíveis escolhas para um índice $1 \leq j \leq k$ tal que $a_i \in A_j$. Use, então, o princípio fundamental da contagem.

9. Após n movimentos, o peão vai parar na casa (a, b), com $a = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ e $b = y_1 + y_2 + \cdots + y_n$, onde $x_i, y_i \in \{-1, 1\}$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto, temos (i) $-n \leq a, b \leq n$ e (ii) a e b têm a mesma paridade de n. Certifique-se de que qualquer ponto (a, b) satisfazendo as condições (i) e (ii) pode ser o ponto final e, em seguida, use o princípio fundamental da contagem para mostrar que há exatamente $(n+1)^2$ de tais pontos.

10. Para o item (a), se $(a_1, \ldots, a_k)$ é uma tal sequência, então $a_1, \ldots, a_k \in \{j, j+1, \ldots, n\}$, de sorte que há exatamente $n - j + 1$ possibilidades para cada a_i; aplique, então, o princípio fundamental da contagem. Para o item (b), observe que o conjunto das sequências desejadas é a diferença entre o conjunto das sequências do item (a) e o conjunto das sequências de k elementos de I_n (possivelmente com repetições), tais

que o menor termo da sequência é maior ou igual a $j+1$. Finalmente, pelo item (b) a soma do item (c) é igual a

$$\sum_{j=1}^{n} j((n-j+1)^k - (n-j)^k);$$

verifique que tal soma é igual a $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

11. Para $k \geq 3$, seja I um ímpar tal que $1 \leq I \leq 2^{k-1} - 1$. Para cada um de tais I, defina $A_I = \{2^t I \in A\}$, de sorte que

$$A = \bigcup_{I=1}^{2^{k-1}-1} A_I \cup \{2^{k-1}+1, 2^{k-1}+3, \ldots, 2^k - 1\},$$

onde o índice I varia sobre os ímpares do intervalo em questão. A partir daí, conclua que, se queremos que um conjunto $X \subset A$ com a propriedade do enunciado tenha o maior número possível de elementos, então: (i) $\{2^{k-1}+1, 2^{k-1}+3, \ldots, 2^k - 1\} \subset X$; (ii) para cada ímpar $1 \leq I \leq 2^{k-1} - 1$, no máximo metade ou $\lfloor \text{metade} \rfloor + 1$ dos elementos de A_I pode estar em X. Em seguida, refine a análise de (ii) para concluir que, se $a \in \mathbb{N}$ e $I \geq 3$ é um ímpar tal que $2^a < I < 2^{a+1}$, então temos no máximo $\lfloor \frac{k-a-1}{2} \rfloor + 1$ elementos de A_I em X. Conclua, a partir daí, que o maior número possível de elementos de um subconjunto bom $X \subset A$ é

$$S = 2^{k-2} + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 1 + \sum_{a=1}^{k-2} 2^{a-1} \left(\left\lfloor \frac{k-a-1}{2} \right\rfloor + 1 \right).$$

Por fim, considere separadamente os casos k par e ímpar para mostrar que $S = \frac{2^{k+1}+(-1)^k}{3}$.

Seção 1.2

1. Exiba uma bijeção entre a família dos subconjuntos de I_n que contêm n e a família dos subconjuntos de I_{n-1}.

2. Se $\mathcal{I}$ denota o conjunto dos naturais de n algarismos cuja soma dos algarismos é um número ímpar, mostre que $a \mapsto 10^n - a$ define uma bijeção entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$. Em seguida, conclua, a partir daí, que $2|\mathcal{P}| = 10^n - 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{n-1}$.

3. Se $n = (a_1a_2 \ldots a_9a_{10})$ é a representação decimal de n, então $m = (a_1a_2 \ldots a_9)$ é um natural de nove algarismos e $a_{10} \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Agora, fixado $m = (a_1a_2 \ldots a_9)$, o critério de divisibilidade por 3 garante que os números $(a_1a_2 \ldots a_91)$, $(a_1a_2 \ldots a_94)$ e $(a_1a_2 \ldots a_97)$ deixam um mesmo resto na divisão por 3, o mesmo ocorrendo com os números $(a_1a_2 \ldots a_92)$, $(a_1a_2 \ldots a_95)$ e $(a_1a_2 \ldots a_98)$, assim como com os números $(a_1a_2 \ldots a_93)$, $(a_1a_2 \ldots a_96)$ e $(a_1a_2 \ldots a_99)$. Além disso, se r_1, r_2 e r_3 denotam tais restos comuns, então r_1, r_2 e r_3 são dois a dois distintos. Portanto, para cada natural $m = (a_1a_2 \ldots a_9)$ de nove algarismos, temos exatamente três naturais $n = (a_1a_2 \ldots a_9a_{10})$ que são divisíveis por 3. Como $a_1 \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ e $a_2, \ldots, a_9 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, o princípio fundamental da contagem garante que a quantidade de números que queremos calcular é $9 \times 10^8 \times 3 = 27 \times 10^8$.

4. Para cada $x \in A$, mostre que há $2^n - 1$ maneiras de escolher os conjuntos A_i que conterão x.

5. As n retas intersectam-se em $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ pontos. Escolha uma reta r que não é paralela a nenhuma das retas determinadas por dois desses pontos. Há, agora, dois tipos de regiões: aquelas que possuem um ponto de altura máxima em relação à reta r – o qual é necessariamente um dos $\frac{n(n-1)}{2}$ pontos de interseção das n retas dadas – e aquelas que não possuem um tal ponto de altura máxima. Mostre que há uma bijeção entre as primeiras e o conjunto formado por seus pontos de altura máxima, de sorte que há, exatamente, $\frac{n(n-1)}{2}$ tais regiões; em seguida, mostre que há exatamente $n+1$ regiões que não possuem ponto de altura máxima, de sorte que o total de regiões é igual a $\frac{n(n-1)}{2} + (n+1)$.

6. Para o item (a), considere a família dos subconjuntos de I_n que contêm n. Para o item (b), seja $\mathcal{F}$ uma família satisfazendo as condições

do enunciado e denote por $\mathcal{F}_c$ a família $\mathcal{F}_c = \{A^c;\ A \in \mathcal{F}\}$; note que $|\mathcal{F}_c| = |\mathcal{F}|$, $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}_c = \mathcal{P}(I_n)$ e mostre que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}_c = \emptyset$.

7. Para o item (b), para $1 \leq i \leq n$ seja a_i o número de conjuntos em $\mathcal{I}_n$ que têm i como elemento central. Pelo item (a), temos $a_i = a_{n+1-i}$. Portanto,

$$\begin{aligned} 2\sum_{A\in\mathcal{I}_n} c(A) &= \sum_{i=1}^{n} ia_i + \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_{n+1-i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} ia_i + \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n}(n+1)a_i = (n+1)\sum_{i=1}^{n} a_i \\ &= (n+1)|\mathcal{I}_n| = (n+1)\cdot 2^{n-1}. \end{aligned}$$

8. Para o item (a), mostre inicialmente que, para $1 \leq k \leq n-1$ inteiro, há uma bijeção entre as partições de n que têm k como uma de suas parcelas e as partições de $n-k$; conclua, a partir daí, que a contribuição de k para $q(n)$ é igual a $p(n-k)$. Para o item (b), mostre que, se k é a maior diversidade possível de uma partição, então $n \geq 1+2+\cdots+k$ e, daí, $k < \sqrt{2n}$. Observe, então, que $q(n) \leq kp(n)$.

Seção 1.3

1. Para $n \geq 3$ inteiro, seja a_n o número de diagonais de um polígono convexo de n lados, de forma que $a_3 = 0$. Mostre que $a_{k+1} = a_k + k - 1$.

2. Mostre que há a_{n+3} modos de escrever $n+4$ como soma de parcelas 1, 3 ou 4, sendo pelo menos uma delas igual a 1; argumente analogamente quanto às parcelas a_{n+1} e a_n.

3. Para estabelecer o item (a), considere um tabuleiro $2\times(k+2)$ e analise as possíveis maneiras de cobrir sua casa superior direita. Para o item (b), calcule a_1 e a_2 e, em seguida, utilize o resultado do teorema 4.16 de [11].

4. Adapte, ao presente caso, a solução do exemplo 1.16.

5. Para o item (a), fixe um elemento x de A e seja $B = A\setminus\{x\}$. Comece mostrando que, se um subconjunto C de A tem um número par de elementos, então há duas possibilidades: (i) $x \notin C$ ou, o que é o mesmo, C é subconjunto de B com um número par de elementos; (ii) $x \in C$, de forma que $C\setminus\{x\}$ é um subconjunto de B com um número ímpar de elementos. Em seguida, mostre que a correspondência $C \mapsto C\setminus\{x\}$ estabelece uma bijeção entre a família dos subconjuntos de A que contém x e têm um número par (resp. ímpar) de elementos e a família dos subconjuntos de B com um número ímpar (resp. par) de elementos. Para o item (b), lembre-se de que $a_n + b_n = 2^n$.

6. Para $k \in \mathbb{N}$, seja x_k a quantidade de números n de k algarismos, tais que n é divisível por 3. Seja também y_k a quantidade de números n de k algarismos, tais que n é divisível por 3 e n não termina em 0. Então, o critério de divisibilidade por 3 garante que $x_{k+1} = x_k + y_{k+1}$, e um cálculo análogo ao da solução do problema 3, página 18, fornece $y_{k+1} = 27\cdot 10^{k-1}$. Como $x_1 = 3$, temos

$$x_{10} = \sum_{k=1}^{9}(x_{k+1}-x_k)+x_1 = \sum_{k=1}^{9} y_{k+1}+3 = 27\times\sum_{k=1}^{9}10^{k-1}+3 = 3\cdot 10^9.$$

7. Para o item (b), note que há dois tipos de partições de I_{n+1} em $k+1$ conjuntos (dois a dois disjuntos e) não vazios: aquelas em que $\{n+1\}$ é um dos conjuntos da partição – há $S(n,k)$ partições desse tipo – e aquelas em que $n+1$ pertence a um conjunto da partição com pelo menos dois elementos –há $(k+1)S(n,k+1)$ partições desse tipo. Observe que o item (c) pede calcular $S(7,3)$, para o quê podemos utilizar a recorrência do item (b), juntamente com o resultado do item (a).

8. Para o item (a), use o princípio fundamental da contagem para mostrar que há exatamente $3 \cdot 2^{n-1}$ bandeiras com n listras, para $n \geq 1$. Para o item (b), comece observando que $a_1 = 0$ e $a_2 = 6$; em seguida, mostre que, para $n \geq 1$, há uma bijeção entre o conjunto de bandeiras com $n + 1$ listras nas quais a primeira e a última faixas têm cores iguais e o conjunto de bandeiras com n listras nas quais a primeira e a última faixas têm cores distintas; então, use o resultado do item (a). Para o item (c), use o resultado de (b) para mostrar que $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$, para $n \geq 1$; em seguida, aplique o teorema 4.16 de [11].

9. Para o item (b), seja A um subconjunto egoísta minimal de I_n contendo n. Note que $1 \notin A$ (pois, caso contrário, A não seria minimal) e $A \neq \{n\}, I_n$. Afirmamos que o conjunto $A' = (A \setminus \{n\}) - 1$ é um subconjunto egoísta minimal de I_{n-2}. Para verificar isso, note primeiramente que $A' \subset I_{n-2}$. Por outro lado, $|A'| = |A| - 1$ e, uma vez que $|A| \in A$, temos $|A| - 1 \in (A - 1) \subset A'$. Assim, A é um subconjunto egoísta de I_{n-2}. Para mostrar que A' é minimal, suponha o contrário, i.e., que houvesse $B' \subset A'$ tal que $B' \neq A'$ e B' fosse egoísta. Então, podemos provar, de modo análogo ao feito acima, que $B = (B' + 1) \cup \{n\} \subset A$ seria um subconjunto egoísta de I_n contendo n. Pela minimalidade de A, viria que $B = A$ e, daí, que $B' = A'$, o que é um absurdo. Analogamente, dado um subconjunto egoísta minimal B de I_{n-2}, prova-se que $(B + 1) \cup \{n\}$ é um subconjunto egoísta minimal de I_n. Para o item (c), se a_n denota o número de subconjuntos egoístas minimais de I_n, segue dos itens (a) e (b) que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n > 2$. Agora, observe que $\{1\}$ é o único subconjunto egoísta minimal dos conjuntos I_1 e I_2 (o conjunto $\{1, 2\}$ é um subconjunto egoísta de I_2 mas não é minimal, uma vez que $\{1\} \subset \{1, 2\}$), de sorte que $a_1 = a_2 = 1$. Assim, a sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ satisfaz a mesma recorrência que a sequência de Fibonacci e é tal que $a_1 = F_1$ e $a_2 = F_2$; logo, segue por indução que $a_n = F_n$, para todo $n \geq 1$.

10. Para o item (a), note que há três tipos de subconjuntos não vazios de Y: os subconjuntos não vazios de X; os conjuntos do tipo $A \cup \{m\}$, onde $A \subset X$ é não vazio; o conjunto $\{m\}$. Em seguida, escreva a_Y como uma soma de três parcelas, cada uma correspondendo aos conjuntos de cada um desses tipos; ao fazê-lo observe que, se $A \subset X$ é não vazio, então $\pi(A \cup \{m\}) = \pi(A)m$. O item (c) segue do item (b), por uma fácil indução.

11. Para o item (a), adapte, ao presente caso, a sugestão dada ao item (a) do problema anterior, observando que, se $A \subset X$ é não vazio, então $\sigma(A \cup \{m\}) = \sigma(A) + m$ e $\pi(A \cup \{m\}) = \pi(A)m$. O item (c) segue do item (b), por uma fácil indução.

12. Seja $I_0 = \{1\}$ e, para todo natural $k \geq 1$, seja I_k o conjunto $\{2^{k-1} + 1, \ldots, 2^k\}$. Mostre primeiro que, para todo k, existe um conjunto bom $B_k \subset \{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ tal que $|B_k| = b_k$ e que $I_k \subset B_k$, ou seja, $B_k \cap I_k = I_k$. Note agora que, como B_k é bom e $B_k \cap I_k = I_k$, devemos ter $B_k \cap I_{k-1} = \emptyset$. Seja, agora, $X_{k-2} = B_k \cap \{1, 2, 3, \ldots, 2^{k-2}\}$. Claramente, todo subconjunto de um conjunto bom também é bom. Logo, X_{k-2} é bom. Conclua, a partir daí, que $b_k \leq b_{k-2} + 2^{k-1}$. Em seguida, tomando um subconjunto bom Y_{k-2} de $\{1, 2, 3, \ldots, 2^{k-2}\}$ e considerando $Y_{k-2} \cup I_k$, mostre que $b_k \geq b_{k-2} + 2^{k-1}$. Para o item (b), use a recorrência do item (a), juntamente com somas telescópicas, para obter $b_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}$.

Seção 1.4

2. Para o item (a), expanda os produtos em $(x+y)^n = (x+y)\ldots(x+y)$ (n fatores $x + y$) e calcule observe que o monômio $x^{n-k}y^k$ aparece tantas vezes quantas forem as maneiras de escolher um subconjunto de k elementos do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Em seguida, generalize tal argumento para obter o item (b).

3. Faça $x_1 = \cdots = x_k = 1$ em (1.12).

4. Observe que cada partição não ordenada de A em k subconjuntos não vazios dá origem a $k!$ partições ordenadas de A em k subconjuntos não vazios.

5. Se a_j é o único máximo local de uma permutação $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, então $a_j = n$. Mostre, agora, que $a_1 < \cdots < a_{j-1}$ e $a_{j+1} > \cdots > a_n$, de maneira que basta escolher o conjunto $\{a_1, \ldots, a_{j-1}\}$. Por fim, observe que j pode variar de 1 a n.

6. Mostre que quaisquer seis dos n pontos determinam um único triângulo satisfazendo as condições do enunciado.

7. Mostre inicialmente que a quantidade de subconjuntos com números pares de elementos é $\sum_{k \geq 0} \binom{n}{2k}$. Em seguida, use o item (b) do corolário 6.13 de [11].

8. Considere uma sequência $(a_1, \ldots, a_{n+k-1})$ de $n+k-1$ termos, sendo $k-1$ deles iguais a 0 e n iguais a 1, e sejam $1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n-k+1$ os índices dos termos da sequência iguais a 0. Há precisamente $x_1 = i_1 - 1 \geq 0$ termos anteriores a a_{i_1}, $x_2 = i_2 - i_1 - 1 \geq 0$ termos entre a_{i_1} e a_{i_2}, $\ldots$, $x_k = (n-k+1) - i_{k-1} \geq 0$ termos posteriores a $a_{i_{k-1}}$. Como todos tais termos são iguais a 1 e há precisamente n termos iguais a 1, segue que $x_1 + \cdots + x_k = n$. Assim, a partir de cada sequência $(a_1, \ldots, a_{n+k-1})$ descrita como acima, obtemos uma solução, em inteiros não negativos, da equação do enunciado. Reciprocamente, dada uma solução $x_1 = j_1, \ldots, x_k = j_k$ em inteiros não negativos da equação do enunciado, podemos formar uma sequência $(a_1, \ldots, a_{n+k-1})$ como acima, fazendo os termos de índices $j_1 + 1$, $j_1 + j_2 + 2$, $j_1 + j_2 + \cdots + j_{k-1} + (k-1)$ iguais a 0 e todos os demais iguais a 1. Portanto, pelo princípio bijetivo basta contarmos quantas são tais sequências, o que é muito simples de fazer: basta escolhermos um subconjunto de $k-1$ elementos do conjunto dos $n+k-1$ índices possíveis, fazendo, em seguida, todos os termos correspondentes aos índices escolhidos iguais a 0 e os demais termos iguais a 1. Pela proposição 1.25, há $\binom{n+k-1}{k-1}$ escolhas possíveis.

9. Se $y_i = x_i - 1$ para $1 \leq i \leq k$, então $y_i \geq 0$ e $y_1 + \cdots + y_k = n - k$. Use, agora, o resultado do problema anterior.

10. Para o item (a), se $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset I_n$ é um conjunto sem elementos consecutivos, faça, $x_1 = a_1 - 1$, $x_{k+1} = n - a_k$ e, para $2 \leq j \leq k$, $x_j = a_j - a_{j-1} - 2$. Então, $x_j \geq 0$ para $1 \leq j \leq k+1$ e

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k+1} x_j &= (a_1 - 1) + \sum_{j=2}^{k} (a_j - a_{j-1} - 2) + (n - a_k) \\ &= (a_1 - 1) + (a_k - a_1 - 2(k-1)) + n - a_k \\ &= n - 2k + 1.\end{aligned}$$

Para o item (b), faça $a_1 = x_1 + 1$ e $a_j = \sum_{i=1}^{j} x_i + 2(j-1)$, para $2 \leq j \leq k$. Então, $a_1 \geq 1$, $a_j - a_{j-1} \geq 2$ para $1 < j \leq k$ e

$$n - a_k = n - \sum_{i=1}^{k} x_i - 2(k-1) = (n - 2k + 1) - \sum_{i=1}^{k} x_i + 1 = x_{k+1} + 1 \geq 1;$$

portanto, uma solução em inteiros não negativos da equação $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = n - 2k + 1$ dá origem a um subconjunto de k elementos de I_n satisfazendo as condições do primeiro lema de Kaplansky. Para o item (c), o princípio bijetivo, juntamente com os resultados dos itens (a) e (b), garante que basta contarmos quantas são as soluções, em inteiros não negativos, da equação $x_1 + \cdots + x_{k+1} = n - 2k + 1$. Mas, pelo problema 8, há precisamente

$$\binom{(n - 2k + 1) + k}{k} = \binom{n - k + 1}{k}$$

tais soluções.

11. Se $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, e $f(a_j) = x_j$, então (1.13) nos dá $x_1 + \cdots + x_k = n$. Aplique, agora, o resultado do problema 9.

12. Sejam $A = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1\}$ e $B = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$, de forma que $I_{2n} = A \cup B$, união disjunta. Sejam $\mathcal{F}$ a família dos subconjuntos

de I_{2n} com quantidades iguais de elementos pares e ímpares e $\mathcal{P}$ a família dos subconjuntos de I_{2n} com n elementos. Mostre que a aplicação $X \mapsto (X \cap A) \cup (B \setminus X)$ estabelece uma bijeção entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$. Conclua, a partir daí, que $|\mathcal{F}| = |\mathcal{P}| = \binom{2n}{n}$.

13. Para $A \subset I_m$, segue do problema 4, página 18, que há exatamente $(2^n-1)^{|A|}$ sequências $(A_1, \ldots, A_n)$ de subconjuntos de I_m tais que $A_1 \cup \ldots \cup A_n = A$. Agora, para $0 \le k \le m$, sabemos que há exatamente $\binom{m}{k}$ subconjuntos A de I_m tais que $|A| = k$. Portanto, denotando por S a soma desejada, temos

$$\begin{aligned} S &= \sum_{A \subset I_m} \sum_{A_1 \cup \ldots \cup A_n = A} |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \\ &= \sum_{A \subset I_m} (2^n-1)^{|A|}|A| = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(2^n-1)^k k \\ &= m(2^n-1)\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}(2^n-1)^{k-1} \\ &= m(2^n-1)[1+(2^n-1)]^{m-1} \\ &= m(2^n-1)2^{n(m-1)}. \end{aligned}$$

14. Seja (i,j) um par ordenado de inteiros distintos, escolhidos dentre $1, 2, \ldots, n$. Note que há exatamente $(n-2)!$ permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tais que $a_1 = i$ e $a_2 = j$, o que dá uma contribuição de $(n-2)!(i-j)^2$ para a soma $\sum_\sigma S_\sigma$. Contudo, o mesmo par (i,j) dá essa mesma contribuição quando $a_k = i$ e $a_{k+1} = j$, para algum k de 1 a $n-1$. Portanto, $(i-j)^2$ aparece $(n-1)(n-2)! = (n-1)!$ vezes na soma $\sum_\sigma S_\sigma$. Segue, daí, que

$$\sum_\sigma S_\sigma = \sum_{(i,j)} (n-1)!(i-j)^2$$

e, portanto, o valor médio das somas S_σ é igual a

$$A = \frac{1}{n!}\sum_\sigma S_\sigma = \frac{1}{n!}\sum_{(i,j)}(n-1)!(i-j)^2 = \frac{1}{n}\sum_{(i,j)}(i-j)^2.$$

Para calcularmos a última soma acima, note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{(i,j)}(i-j)^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-j)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+j^2-2ij) \\ &= \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[n\sum_{i=1}^{n} i^2 + n\sum_{j=1}^{n} j^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[2n\sum_{i=1}^{n} i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\left[2n\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{(n-1)n(n+1)}{6} = \binom{n+1}{3}. \end{aligned}$$

15. Fixe um dos $2n+1$ pontos dados, trace o diâmetro que passa por ele e suponha que tal diâmetro deixa d dos $2n$ pontos restantes de um lado, e $2n-d$ pontos do outro lado. Use combinações para concluir que o número de triângulos obtusângulos tendo o ponto fixado como um de seus vértices e um ângulo agudo nesse vértice é igual a $d^2-2nd+2n^2-n$, sendo, portanto, maior ou igual a $n(n-1)$. Somando tal número de triângulos obtusângulos sobre todos os $2n+1$ pontos, conclua que há pelo menos $(2n+1)\binom{n}{2} = \frac{2n+1)n(n-1)}{2}$ triângulos obtusângulos. Por fim, deduza a partir daí que o número de triângulos acutângulos tendo vértices em três dos pontos dados é no máximo $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

16. Fixados $1 \le i \le n$ e $0 \le j \le \min\{i-1, n-i\}$, a proposição 1.25 garante que há exatamente $\binom{i-1}{j}$ maneiras de escolhermos j elementos de I_n menores que i e $\binom{n-i}{j}$ maneiras de escolhermos j elementos de I_n maiores que i. Portanto, segue dos princípios multiplicativo e aditivo

que i é o elemento central de exatamente

$$\sum_j \binom{i-1}{j}\binom{n-i}{j}$$

conjuntos $A \in \mathcal{I}_n$, onde a soma acima se estende aos índices $0 \leq j \leq \min\{i-1, n-i\}$. Para a segunda igualdade do item (a), há pelo menos dois argumentos possíveis:

(i) Comparando o coeficiente de x^{i-1} em ambos os membros da igualdade

$$(1+x)^{i-1}(1+x)^{n-i} = (1+x)^{n-1}$$

obtemos, com o auxílio da fórmula de expansão binomial, que

$$\sum_{j\geq 0} \binom{i-1}{j}\binom{n-i}{n-i-j} = \binom{n-1}{i-1}.$$

(ii) Se $x_{k+1} = i$ e $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2k+1}\}$ é como acima, escreva $A = \underline{B} \cup \{x_{k+1}\} \cup \overline{B}$, com $\underline{B} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $\overline{B} = \{x_{k+2}, \ldots, x_{2k+1}\}$; se $\overline{B}' = \{i+1, i+2, \ldots, n-1, n\} \setminus \overline{B}$, mostre que a aplicação

$$\underline{B} \cup \{x_{k+1}\} \cup \overline{B} \longmapsto \underline{B} \cup \overline{B}'$$

estabelece uma bijeção entre $\mathcal{I}_n$ e a família dos subconjuntos de $n-i$ elementos de $I_n \setminus \{i\}$. Como $|I_n \setminus \{i\}| = n-1$, concluímos, novamente com o auxílio da proposição 1.25, que i é o elemento central de $\binom{n-1}{n-i}$ conjuntos em $\mathcal{I}_n$.

O restante da demonstração é imediato a partir do teorema das linhas do triângulo de Pascal (cf. item (a) do corolário 6.13 de [11]):

$$\begin{aligned}\sum_{A\in\mathcal{I}_n} c(A) &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} i \\ &= (n-1)\sum_{i=1}^{n}\binom{n-2}{i-2} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} \\ &= (n-1)\cdot 2^{n-2} + 2^{n-1} = (n+1)\cdot 2^{n-2}.\end{aligned}$$

17. Para o item (a), se f é uma função satisfazendo as condições do enunciado, então f é injetiva, pois $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. Agora, segue do problema 4, página 9, que f é uma bijeção. Suponha que f tem exatamente k pontos fixos. Fixe $a \in I_n$ tal que a não é ponto fixo de f e seja $b = f(a)$. Então $b \neq a$ (uma vez que a não é ponto fixo de f) e, por outro lado, $f(b) = f(f(a)) = a$. Assim, podemos agrupar os $n-k$ elementos de I_n que não são pontos fixos de f em pares (a, b), tais que $b = f(a)$ e $a = f(b)$, o que implica que $n-k$ deve ser par. Para o item (b), seja dado $0 \leq k \leq n$ tal que $n-k$ seja par. Para cada escolha de k elementos $x_1, \ldots, x_k \in I_n$ e para cada partição $\{\{a_1, b_1\}, \ldots, \{a_l, b_l\}\}$ do conjunto dos $n-k$ elementos restantes de I_n em pares, existe uma única função $f : I_n \to I_n$ que tem $x_1, \ldots, x_k$ por pontos fixos e satisfaz $f(a_i) = b_i$ e $f(b_i) = a_i$, para $1 \leq i \leq l$. Observe que, para uma tal função, temos $f(f(a_i)) = f(b_i) = a_i$ e, analogamente, $f(f(b_i)) = b_i$, para $1 \leq i \leq l$; portanto, $f(f(x)) = x$, para todo $x \in I_n$. Para o item (c), fixado $0 \leq k \leq n$ tal que $n-k$ seja par, há $\binom{n}{k}$ modos de escolhermos os k pontos fixos de f. O número de modos de particionarmos os $n-k$ elementos restantes de I_n em pares é igual a

$$\binom{n-k}{2}\cdot\binom{n-k-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = \frac{(n-k)!}{2^{(n-k)/2}}.$$

Portanto, o número de funções $f : I_n \to I_n$ satisfazendo as condições do enunciado é igual a

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ n\equiv k \pmod 2}} \binom{n}{k}\cdot\frac{(n-k)!}{2^{(n-k)/2}} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ n\equiv k \pmod 2}} \frac{n!}{k!\cdot 2^{\frac{n-k}{2}}}.$$

18. Seja $|\mathcal{F}| = k$. A cada $A = \{a, b, c\} \in \mathcal{F}$, associe seus subconjuntos de dois elementos, $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ e $\{c, a\}$. A condição do enunciado garante que cada subconjunto de dois elementos de I_n é associado a no máximo um dos conjuntos $A \in \mathcal{F}$. Asssim, $3k \leq \binom{n}{2}$ e, daí, segue a desigualdade desejada.

19. Para cada $1 \leq i \leq n$, escolha $B_i \subset A_i$ tal que $|B_i| = k$. A condição $|A_i \cap A_j| \leq k-1$ para $1 \leq i < j \leq n$ garante que a função $i \mapsto B_i$ assim obtida é injetiva; de fato, se $1 \leq i < j \leq n$ são tais que $B_i = B_j = B$, então $|A_i \cap A_j| \geq |B| \geq k$. Agora, $\{B_1, \ldots, B_n\}$ é uma família de subconjuntos distintos de m elementos do conjunto A, de forma que, pela proposição 1.25, $n \leq \binom{m}{k}$.

20. Para $1 \leq k \leq n$, denote por m_k o número de conjuntos P_i's que contêm a_k; conclua que $m_1 + \cdots + m_n = 2n$. Se $\mathcal{F}$ é a família dos conjuntos $\{P_i, P_j\}$ tais que $i \neq j$ e $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, use as condições do enunciado para concluir que $|\mathcal{F}| = \sum_{i=1}^{n} \binom{m_i}{2}$. Considere, agora, a função
$$f : \mathcal{F} \to \{P_1, \ldots, P_n\}$$
tal que $f = (\{P_i, P_j\}) = P_k$, com $P_k = \{a_i, a_j\}$; conclua que f é injetiva e, a partir daí, que
$$\sum_{i=1}^{n} \binom{m_i}{2} \leq n,$$
de sorte que $m_1^2 + \cdots + m_n^2 \leq 4n$. Por fim, use a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética (cf. [11], por exemplo) para concluir que $m_1 = \cdots = m_n = 2$.

Seção 2.1

1. Em cada um dos itens de (a) a (d), avalie as funções correspondentes em $x \in A$.

2. Use o resultado do exemplo 2.6, juntamente com o fato de que, como $m < n$, não há função sobrejetora $f : I_m \to I_n$.

3. Sejam $C_1, \ldots, C_n$ os casais, A o conjunto de filas de $2n$ pessoas formadas com os cônjuges dos n casais (sem restrições adicionais) e A_i o subconjunto de A formado pelas filas nas quais os cônjuges do casal C_i estão em posições consecutivas. Queremos calcular o número de elementos do conjunto $A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Para tanto, aplique o princípio da inclusão-exclusão, observando que $|A| = (2n)!$ e $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (2n-k)!(2!)^k$, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

4. Para $1 \leq j \leq 5$, seja $\mathcal{P}_j$ o conjunto das permutações $(a_1, a_2, \ldots, a_6)$ de I_6 tais que $(a_1, \ldots, a_j)$ é permutação de I_j. Queremos calcular $|\mathcal{P} \setminus \bigcup_{j=1}^{5} \mathcal{P}_j|$, onde $\mathcal{P}$ é o conjunto de todas as permutações de I_6; para tanto, se $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq 5$, conclua que
$$|\mathcal{P}_{i_1} \cap \ldots \cap \mathcal{P}_{i_k}| = i_1!(i_2 - i_1)! \ldots (i_k - i_{k-1})!(6 - i_k)!$$
Finalmente, aplique o princípio da inclusão-exclusão e calcule efetivamente as parcelas do tipo acima.

5. Sejam $A = \{1 \leq m \leq n;\ \text{mdc}\,(m,n) = 1\}$ e, para $1 \leq i \leq k$, $A_i = \{1 \leq m \leq n;\ p_i \mid m\}$. Então, $I_n \setminus A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e, para calcular $|A|$, basta aplicar o princípio da inclusão-exclusão a tal igualdade. Para tanto, observe que, se $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq k$, então $m \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ se, e só se, $p_{i_1} \ldots p_{i_j} \mid m$, de sorte que $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| = \frac{m}{p_{i_1} \cdots p_{i_j}}$.

6. Comece mostrando que, para $q \in \mathbb{N}$, o número de naturais menores ou iguais a n e divisíveis por q é igual a $\lfloor \frac{n}{q} \rfloor$. Em seguida, defina $A_j = \{a \in \mathbb{N};\ a \leq n \text{ e } p_j \mid a\}$, e observe que o número de primos menores ou iguais a n é dado por $n - |A_1 \cup \ldots \cup A_k|$.

7. Seja A o conjunto das soluções $(x_1, \ldots, x_n)$ da equação do enunciado, com $x_t \in \mathbb{Z}_+$ para $1 \leq t \leq n$. Para $1 \leq i \leq n$, seja A_i o conjunto das soluções $(x_1, \ldots, x_n)$ da equação do enunciado, tais que todos os x_t's são inteiros não negativos, mas $x_i > k$. Queremos contar $|A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)|$; para tanto, aplique o princípio da inclusão-exclusão, lembrando (cf. problema 8, página 40) que $|A| = \binom{m+n-1}{n-1}$ e mostrando que
$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| = \binom{m - j(k+1) + n - 1}{n-1},$$

para todos $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$. Para esse último cálculo, observe que $(x_1, \ldots, x_n) \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}$ se, e só se, $x_{i_1}, \ldots, x_{i_j} \geq k+1$; portanto, fazendo $y_t = x_t$, para $t \neq i_1, \ldots, i_j$, e $y_{i_l} = x_{i_l} - (k+1)$, para $1 \leq l \leq j$, temos $y_1, \ldots, y_n \geq 0$ e $y_1 + \cdots + y_n = m - j(k+1)$; agora, aplique novamente o resultado do problema 8, página 40.

Seção 2.2

1. Escreva explicitamente as parcelas dos somatórios de ambos os membros da igualdade do enunciado.

2. Observe que ambos os membros da igualdade em questão contam quantos subconjuntos possui um conjunto com n elementos.

3. Adapte, ao presente caso, a ideia da prova do exemplo 2.9.

4. Comece escolhendo k elementos pares e k elementos ímpares; em seguida, use a identidade de Lagrange.

5. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ as patrulhas, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ os homens e defina uma função

$$f : \{h_1, \ldots, h_n\} \to \{\{P_i, P_j\};\ 1 \leq i < j \leq 11\}$$

pondo

$$f(h_i) = \{P_j, P_k\} \Leftrightarrow h_i \text{ compõe } P_j \text{ e } P_k.$$

As condições do enunciado garantem imediatamente que f é uma bijeção, de sorte que há tantos homens quantos forem os subconjuntos de 2 elementos do conjunto formado pelas 11 patrulhas, i.e., $n = \binom{11}{2} = 55$. Agora, seja A o conjunto dos pares ordenados (h_i, P_j), tais que $h_i \in P_j$. Como há n homens e cada homem participa de exatamente duas patrulhas, A possui exatamente $2n$ pares. Por outro lado, se k é o número de integrantes de cada patrulha, então P_j é a segunda entrada de exatamente k pares em A (os pares cujas primeiras entradas são os k integrantes de P_j); mas, como há exatamente 11 patrulhas, segue que A possui exatamente $11k$ pares. Logo, $2n = 11k$ e, daí, $k = \frac{2\cdot 55}{11} = 10$.

6. Mostre que ambos os membros da igualdade em questão contam o número de pontos fixos de todas as permutações de I_n.

7. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_m$ os termos iniciais das PA's, e $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > a_1, \ldots, a_m$. Contemos o número de elementos de I_n de duas maneiras distintas. Por um lado, a maneira óbvia é $|I_n| = n$. Por outro, se a PA de termo inicial a_i e razão d_i tiver exatamente k_i termos em I_n, então

$$a_i + (k_i - 1)d_i \leq n < a_i + k_i d_i$$

ou, ainda,

$$\frac{n - a_i}{d_i} < k_i < \frac{n - a_i}{d_i} + 1.$$

Somando as desigualdades acima para $1 \leq i \leq m$, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n - a_i}{d_i} < \sum_{i=1}^{m} k_i < \sum_{i=1}^{m} \frac{n - a_i}{d_i} + m.$$

Mas, como $\sum_{i=1}^{m} d_i = n$ (eis aí a contagem dupla!), dividindo as desigualdades acima por n, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{d_i} < 1 < \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{d_i} + \frac{m}{n}.$$

Finalmente, fazendo $n \to +\infty$ nas desigualdades acima, obtemos

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i} \leq 1 \leq \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d_i},$$

conforme desejado.

8. Associe 0 ou 1 a cada lado de cada triângulo menor, conforme seus vértices tenham rótulos iguais ou distintos, respectivamente; em seguida, associe a cada triângulo menor a soma dos números associados

a seus lados. Observe agora que o número associado a um triângulo menor é 0, 2 ou 3, sendo igual a 3 se, e só se, o triângulo tiver vértices A, B e C. Por fim, use contagem dupla para mostrar que a soma dos números associados aos triângulos menores é sempre ímpar.

9. Denote por x o número de comissões como pede o enunciado e por y o número restante delas. Conclua inicialmente que $x + y = 4060$. Fixe agora um senador qualquer e mostre que ele participa de exatamente 268 comissões nas quais os outros dois membros são seus amigos ou seus inimigos; a partir daí, use contagem dupla para concluir que $3x + y = 30 \cdot 268$.

10. Seja $A_1A_2 \ldots A_n$ o polígono, $A_nA_2 \cap A_1A_3 = \{X\}$ e $A_2A_4 \cap A_3A_5 = \{Y\}$; escolha os seguintes $n-2$ pontos: um ponto B no interior de A_1A_2X, um ponto C no interior de A_3A_4Y e, para $5 \leq j \leq n$, um ponto no interior de $A_2A_3A_j \cap A_{j-1}A_jA_{j+1}$; com o auxílio do princípio fundamental da contagem, mostre que o número de triângulos formados por vértices do polígono e contendo um dos pontos escolhidos é
$$2(n-2) + \sum_{j=5}^{n}(j-3)(n-j+2) = \binom{n}{3}.$$

Seção 2.3

1. Para o item (a), deixamos a cargo do leitor demonstrar que $\sim$ é simétrica. Para a reflexividade, seja dado $a \in A$. Como $\mathcal{F}$ é uma partição de A, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $a \in B$. Logo, $a, a \in B$ ou, o que é o mesmo, $a \sim a$. Sejam agora $a, b, c \in A$, tais que $a \sim b$ e $b \sim c$. Então, existem $B, C \in \mathcal{F}$ tais que $a, b \in B$ e $b, c \in C$. Mas, como $\mathcal{F}$ é uma partição de A e $B \cap C \neq \emptyset$ (uma vez que $b \in B \cap C$), concluímos que $B = C$; logo, $a \sim c$. Por fim, para $a \in A$, tome o conjunto $B \in \mathcal{F}$ tal que $a \in B$. Então,
$$\overline{a} = \{x \in A;\ x \sim a\} = \{x \in A;\ x, a \in C,\ \exists C \in \mathcal{F}\}.$$

Mas, como $\mathcal{F}$ é uma partição de A, o conjunto B é o único elemento de $\mathcal{F}$ ao qual a pertence. Logo,
$$\overline{a} = \{x \in A;\ x \in B\} = B.$$

A análise do item (b) é semelhante e será deixada a cargo do leitor; observamos que, nesse caso, se B for um conjunto finito, então há exatamente $|B|$ classes de equivalência distintas.

2. $A \sim A$, pois $A = A + 0$ módulo 3. Se $A \sim B$, com $B = A + j$ módulo 3, então $B \sim A$, com $A = B + (3 - j)$ módulo 3. Por fim, se $A \sim B$ e $B \sim C$, com $B = A + i$ módulo 3 e $C = B + j$ módulo 3, mostre que $C = A + k$ módulo 3, onde $0 \leq k \leq 2$ é tal que $i + j \equiv k \pmod 3$.

3. Para o item (b), use o resultado do item (a), juntamente com a proposição 2.16 e a definição dos números de Stirling de segundo tipo. Para o item (c), use o resultado do item (b), juntamente com o exemplo 2.6.

4. Se a escolha dos conjuntos fosse ordenada, haveria $\binom{ab}{b,\ldots,b} = \frac{(ab)!}{(b!)^a}$ maneiras de particionar o conjunto; como a escolha dos conjuntos não é ordenada, temos que dividir por $a!$.

5. Inicialmente, observe que há $m^p - m$ sequências não monocromáticas de p contas, cada uma delas pintada com uma das m cores dadas. Agora, aplicando a tais sequências a relação de equivalência (2.16) (com p no lugar de n), conclua que o número de colares não monocromáticos distintos é igual a $\frac{m^p - m}{p}$. Por fim, como há exatamente m colares monocromáticos, nada mais há a fazer. Para a segunda parte, segue da primeira que p divide $m^p - m = m(m^{p-1} - 1)$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Se $p \nmid m$, de sorte que p e m são primos entre si, conclua que p divide $m^{p-1} - 1$.

6. No conjunto $\mathcal{F}$ das sequências aperiódicas de tamanho n, defina a relação $\sim$ pondo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se, e só se, existe $0 \leq k \leq n-1$ tal que $y_i = x_{i+k \pmod n}$, para $1 \leq i \leq n$. Mostre que tal relação é de equivalência e que cada classe de equivalência é formada

por exatamente n sequências. Em seguida, aplique o resultado da proposição 2.18.

7. Aplique o teorema de Bollobás, juntamente com o fato de que $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ é o maior número binomial com numerador igual a n.

8. Para o item (a) mostre que, se $A, B \subset I_n$ são subconjuntos distintos e com $k > \frac{n}{2}$ elementos cada, então $A \cap B \neq \emptyset$. Para o item (b), tome $\mathcal{F}$ como a família formada pelos subconjuntos de k elementos de I_n contendo n. Para o item i., fixado $A \in \mathcal{F}$ compatível com $\overline{\sigma}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\sigma = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. Agrupe os demais subconjuntos de k elementos de I_n que intersectam A e são compatíveis com $\overline{\sigma}$ em pares. Em seguida, use o fato de $\mathcal{F}$ ser intersectante para concluir que há no máximo outros $k-1$ conjuntos em $\mathcal{F}$ ainda compatíveis com $\overline{\sigma}$. Para ii., suponha, sem perda de generalidade, que $A = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $\sigma = (a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, com $\{x_1, \ldots, x_k\} = \{a_1, \ldots, a_k\}$. Por fim, para iii. use contagem dupla.

Seção 2.4

1. Sejam $\mathcal{S}_n$ o conjunto das sequências $a = (a_1, \ldots, a_n)$, com $a_i \in \{0, 1\}$ para $1 \leq i \leq n$, e $\mathcal{P}(n)$ a família das partes de I_n. Para $a \in \mathcal{S}_n$, defina $f(a) \in \mathcal{P}(n)$ por $f(a) = \{1 \leq i \leq n; a_i = 1\}$. Agora, verifique que a função $f : \mathcal{S}_n \to \mathcal{P}(n)$ assim definida é uma bijeção que *preserva métricas*, no seguinte sentido: se d é a métrica de Hamming em $\mathcal{S}_n$ e d' é a métrica da diferença simétrica em $\mathcal{P}(n)$, então $d(a, b) = d'(f(a), f(b))$, para todos $a, b \in \mathcal{S}_n$.

2. Seja $k = \frac{n+1}{2}$ ou, o que é o mesmo, $n = 2k - 1$. O fato de f ser a métrica de Hamming em $\mathcal{T}$, juntamente com a condição do item (b), garante que $|B(x; 3) \cap \mathcal{S}| = 1$, para todo $x \in \mathcal{T}$. Use essa relação para concluir que $3 \cdot 2^{k-2} = k(2k^2 - 3k + 4)$. Para resolver tal equação, mostre inicialmente que $3 \mid k$; em seguida, escreva $k = 3l$ e conclua que $l \leq 4$, de sorte que $l = 4$, $k = 12$ e $n = 23$.

3. Adapte, ao presente caso, a discussão do exemplo 2.29 e a sugestão dada ao problema 18, página 43.

4. Seja $\mathcal{P}(n)$ a família das partes de I_n, munida com a métrica da diferença simétrica. Mostre que, para $1 \leq i \leq k$, as bolas $B(A_i; r)$ são duas a duas disjuntas. Em seguida, use (2.20), juntamente com o fato de $B(A_1; r) \cup \ldots \cup B(A_k; r) \subset \mathcal{P}(n)$.

5. Inicialmente, se A e B são os conjuntos de pessoas que participam de dois dos subcomitês em questão, observe que o conjunto das pessoas que participam de exatamente um desses dois subcomitês é $A \Delta B$, de sorte que $|A \Delta B| \geq 5$. Agora, aplique o resultado do problema anterior.

Seção 3.1

1. Derive termo a termo ambos os membros de (3.2) e, em seguida, faça $x = 1$. Observamos que o teorema 3.5 garante a licitude de um tal procedimento.

Seção 3.2

1. Faça indução sobre $k \geq 2$, sendo o caso inicial $k = 2$ dado pela proposição 3.4.

2. Aplique o teorema 3.5 $k - 1$ vezes, a partir de $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$. Alternativamente, expanda $(1-x)^{-k}$ por meio da série binomial.

3. Para o item (c), segue do item (b) e de (3.5) que $g'(x) = \sum_{n \geq 1} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}$, para $|x| < 1$. Portanto, $f'(x) = g'(x)$ e $f(0) = g(0)$, de sorte que $f(x) = g(x)$, para $|x| < 1$.

4. Para o item (b), segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = F(x) = \int_0^x F'(t)dt$$
$$= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \sum_{n\geq 0} a_n t^n dt.$$

Seção 3.3

1. Fazendo $f(x) = \sum_{k\geq 1} a_k x^k$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k\geq 1} a_k x^k = x \sum_{k\geq 1} a_k x^{k-1} = x \sum_{k\geq 0} a_{k+1} x^k \\ &= 2x + x \sum_{k\geq 1} (a_k + (k+1)) x^k \\ &= 2x + x f(x) + x \sum_{k\geq 1} (k+1) x^k \\ &= 2x + x f(x) + x g'(x), \end{aligned}$$

onde $g(x) = \sum_{k\geq 1} x^k = \frac{x}{1-x}$, para $|x| < 1$. A partir daí, obtenha uma expressão fechada para $f(x)$, válida para $|x| < 1$, expanda tal expressão em série de potências e obtenha a expressão para a_k em função de k.

2. Adapte, ao presente caso, a discussão do exemplo 3.2.

3. Para o item (b), temos

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n\geq 1} a_n x^n = 1 + \sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n\geq 0} (2a_n + n) x^{n+1} \\ &= 1 + 2x f(x) + \sum_{n\geq 0} (n+2) x^{n+1} - 2 \sum_{n\geq 0} x^{n+1} \\ &= 1 + 2x f(x) + g'(x) - 2g(x), \end{aligned}$$

com $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Para o item (c), reduza a soma do segundo membro ao mesmo denominador comum e, em seguida, compare, nos numeradores do primeiro e do segundo membros, os coeficientes constantes, de x e x^2, obtendo um sistema linear de equações nas incógnitas A, B e C. Por fim, para o item (d), use o resultado do problema 2, página 102.

4. Queremos o coeficiente de x^m no produto

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots) \ldots (x + x^2 + \cdots),$$

com k fatores $x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$, para $|x| < 1$.

5. Queremos o coeficiente de x^{20} no produto

$$(1+x+x^2+\cdots)(x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots+x^7).$$

Denotando a expressão acima por $f(x)$, para $|x| < 1$, temos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(1 + x + x^2 + \cdots)^3(1 + x + x^2 + \cdots + x^7) \\ &= (x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^9) \cdot \frac{1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

Use, agora, o resultado do problema (2), página 102.

8. Use a fórmula para o número de permutações caóticas, juntamente com (3.7), para escrever

$$\left| d_n - \frac{n!}{e} \right| = n! \left| \sum_{k>n} \frac{(-1)^k}{k!} \right|.$$

Em seguida, aplique a desigualdade triangular e perfaça estimativas análogas àquelas do exemplo 3.23 de [13] para concluir que $\left| d_n - \frac{n!}{e} \right| < \frac{1}{n}$.

Seção 4.1

1. Comece observando que, se um quadrado pode ser particionado em k outros quadrados, então ele também pode ser particionado em $k+3$ quadrados. Em seguida, mostre como particionar um quadrado em 6, 7 ou 8 quadrados.

2. Dado um polígono convexo $A_1A_2\ldots A_kA_{k+1}$, seu interior é igual à união dos interiores dos polígonos convexos $A_1A_2\ldots\widehat{A_i}\ldots A_kA_{k+1}$, onde o símbolo $\widehat{}$ sobre A_i significa que o vértice A_i foi excluído. Portanto, O pertence a um desses polígonos convexos de k lados, digamos $A_1A_2\ldots A_k$. Encaixe uma hipótese de indução e mostre diretamente que, para algum $1 \leq i \leq k$, pelo menos um dos ângulos $\angle A_iOA_{k+1}$ não é agudo.

3. Faça indução completa sobre o número k de lados do polígono. Para o passo de indução, considere um polígono P de n vértices, onde algumas diagonais que não se intersectam no interior de P estão traçadas. Suponha, sem perda de generalidade, que essas diagonais particionam P em triângulos. Fixe uma das diagonais traçadas, AB digamos, de sorte que AB divide P em dois polígonos P_1 e P_2. Use a hipótese de indução para mostrar que tanto P_1 quanto P_2 possuem um vértice diferente de A ou B, no qual não incide nenhuma das diagonais de P traçadas.

4. Por hipótese de indução, suponha que podemos pintar k torres conforme pedido, para um certo $k < n^2$. Considere $k+1$ torres no tabuleiro, descarte a torre superior esquerda e aplique a hipótese de indução às k torres restantes. Em seguida, pinte a torre descartada de uma cor distinta da(s) cor(es) utilizada(s) para pintar (se houver) as torres mais próximas da torre descartada e situadas na mesma linha ou coluna daquela.

5. Supondo a afirmação verdadeira para k retas, ao traçar a $(k+1)-$ésima reta, r digamos, faça o seguinte: escolha um dos semiplanos que r determina e mantenha a cor de todas as regiões do plano contidas nesse semiplano (mesmo daquelas resultantes da divisão de uma região em duas por r); troque a cor de todas as regiões do plano contidas no semiplano oposto (novamente, mesmo daquelas resultantes da divisão de uma região em duas por r).

6. Faça indução sobre o número de colunas do tabuleiro (independentemente do número de linhas). Para tanto, diga que o quadrado é *azul* (resp. *vermelho*) se a rainha puder visitar todas as casas azuis (resp. vermelhas) satisfazendo as condições do enunciado. Para o passo de indução, aplique a hipótese de indução ao tabuleiro $m \times n$, obtido de um tabuleiro $m \times (n+1)$ pela exclusão da última coluna da direita. Para tanto, considere três casos separadamente: (i) o tabuleiro menor é azul mas não vermelho; (ii) o tabuleiro menor é vermelho mas não azul; (iii) o tabuleiro menor é azul e vermelho. No caso (i), se a coluna retirada tiver alguma casa azul, então pelo menos uma das demais casas de sua linha é azul; mostre que, assim sendo, o tabuleiro maior também é azul. No caso (ii), argumente de forma análoga. Finalmente, no caso (iii), comece observando que podemos supor que, se uma casa da coluna retirada é azul (resp. vermelha), então as demais casas de sua linha são todas vermelhas (resp. azuis). Ande com a rainha na diagonal para mostrar que o tabuleiro maior ainda é vermelho e azul.

7. Para o item (a), seja r a reta que passa por dois dos n pontos dados, A e B digamos, e que está a uma distância positiva mínima de algum dos pontos dados, digamos o ponto C. Argumente por contradição para mostrar que, dos n pontos dados, A e B são os únicos situados sobre r. Para o item (b), use indução. O caso inicial é $n=3$; para executar o passo de indução, use o resultado do item (a).

8. Argumente por indução completa sobre n. Para o passo de indução, suponha a propriedade válida para $1 \leq n \leq k$, onde $k \in \mathbb{N}$, considere $2k+2$ pontos satisfazendo as condições do enunciado e seja P o menor polígono convexo contendo tais (de forma que os vértices de P são alguns desses pontos). Considere dois casos separadamente:

(i) Há dois vértices consecutivos de P tais que um é azul (o vértice A) e outro é vermelho: trace AV e aplique a hipótese de indução.

(ii) Os vértices de P são monocromáticos (vermelhos, digamos): tome um lado de P, chamando-o V_1V_2. Numere os vértices azuis A_1, A_2, ..., A_k, A_{k+1}, de tal modo que

$$V_2\widehat{V}_1A_1 < V_2\widehat{V}_1A_2 < \cdots < V_2\widehat{V}_1A_{k+1}.$$

Defina uma função $f : \{1, 2, \ldots, k+1\} \to \mathbb{N}$ pondo

$$f(i) = \#(\text{pontos vermelhos no interior de } \angle V_2V_1A_i) + 2,$$

de sorte que

$$2 \leq f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(k) \leq f(k+1) \leq k$$

(observe que a última desigualdade decorre do fato de que P tem pelo menos três vértices, e que um deles não é interior a $\angle V_2V_1A_{k+1}$). Conclua que existe $2 \leq i \leq k$ tal que $f(i) = i$, trace V_1A_i e aplique a hipótese de indução.

Seção 4.2

1. Particione o quadrado dado em quatro outros, os quais serão as casas dos pombos. Observe que o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1cm é exatamente $\sqrt{2}$cm.

2. As casas são os intervalos $\left[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n}\right)$, com $0 \leq l < n$, e os pombos são as partes fracionárias[1] dos números kx, com $1 \leq k \leq n-1$. Observe que, se $\{kx\} \in [0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{n-1}{n}, 1)$, para algum inteiro k tal que $1 \leq k \leq n-1$, então nada há a fazer. Senão, então $\{kx\} \in \bigcup_{l=1}^{n-2}[\frac{l}{n}, \frac{l+1}{n})$, para todo $1 \leq k \leq n-1$; aplique, agora, o princípio da casa dos pombos.

[1]Recorde que, para $x \in \mathbb{R}$, sua **parte fracionária** $\{x\}$ é o real $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$; note que $\{x\} \in [0, 1)$.

3. Particione o cubo em $9^3 = 729$ cubinhos de lado $\frac{10}{9}$cm cada; tais cubinhos serão as casas dos pombos e terão diagonais de comprimento $\frac{10\sqrt{3}}{9}$cm, com $\frac{10\sqrt{3}}{9} < 2$.

4. Argumentando por contradição, se $a_1 \leq m$, $a_2 \leq m$, ..., $a_n \leq m$, então
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \frac{n \cdot m}{n} = m.$$
O outro caso é completamente análogo.

5. Argumentemos como no problema anterior: como cada número é parcela de cinco somas de cinco números consecutivos, a soma total das possíveis somas de cinco números consecutivos é igual a
$$\frac{(1+15) \cdot 15}{2} \cdot 5 = 40 \cdot 15.$$
Como há 15 somas de cinco números consecutivos, o valor médio de uma delas é $\frac{40 \cdot 15}{15} = 40$. Logo, pelo resultado do problema anterior, ao menos uma dessas 15 somas é maior ou igual a 40.

6. Aplique o resultado do problema 4, contando o número total de coincidências de cores de setores superpostos dos discos A e B, em cada uma das 200 posições de superposição possíveis.

7. Considere os 51 conjuntos $\{0\}$, $\{1, 99\}$, $\{2, 98\}$, ..., $\{49, 51\}$, $\{50\}$. Uma vez que há 100 restos possíveis na divisão de um inteiro por 100 (o resto varia de 0 a 99), pelo menos dois dos 52 números têm restos em um mesmo desses 51 conjuntos. Logo, sua soma ou diferença é múltipla de 100.

8. Os pombos são os $n+1$ números 1, 11, 111, ..., $11\ldots1$ (este último com $n+1$ algarismos 1), enquanto as casas são os restos da divisão de um inteiro por n, i.e., os números 0, 1, ..., $n-1$.

9. Dado n natural, adapte a sugestão dada ao problema anterior para mostrar, com o auxílio do princípio da casa dos pombos, que n tem múltiplos das formas $a = 33\ldots300\ldots0$ e $b = 77\ldots700\ldots0$, para

certas quantidades de algarismos 0, 3 e 7; mostre, agora, que é possível escolher $m \in \mathbb{N}$ tal que $a+10^m b$ ou $10^m a+b$ tem soma dos algarismos igual a um número ímpar.

10. A condição $\text{mdc}\,(a,n)=1$ garante que nenhuma das potências dadas de a é divisível por n. Assim, podemos alocá-las em caixas numeradas de 1 a $n-1$, conforme os restos de suas divisões por n. Se a casa 1 contiver pelo menos uma das potências dadas de a, então nada haverá a fazer; senão, as $n-1$ potências de a estarão alocados nas $n-2$ caixas de números variando de 2 a $n-1$. Pelo princípio da casa dos pombos, existe $2 \leq k \leq n-1$ tal que a caixa de número k contém pelo menos duas potências de a, digamos a^i e a^j, com $1 \leq i < j \leq n-1$. Então, temos $a^i = ns+k$ e $a^j = nt+k$, para certos $s,t \in \mathbb{Z}$. Segue que

$$a^i(a^{j-i}-1) = a^j - a^i = n(t-s),$$

de forma que $n \mid a^i(a^{j-i}-1)$. Mas, como $\text{mdc}\,(n,a^i)=1$, concluímos que $n \mid (a^{j-i}-1)$ ou, o que é o mesmo, que a^{j-i} deixa resto 1 quando dividido por n.

11. Se uma das somas a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, ..., $a_1+a_2+\cdots+a_n$ deixar resto 0 quando dividida por n, nada haverá a fazer. Senão, distribua tais somas em caixas numeradas de 1 a $n-1$, conforme seus restos na divisão por n. Como há n somas a distribuir em $n-1$ caixas, o princípio da casa dos pombos garante que pelo menos duas somas ocuparão uma mesma caixa. Sendo $a_1+\cdots+a_k$ e $a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_l$ essas duas somas, conclua que $a_k+a_{k+1}+\cdots+a_l$ é um múltiplo de n.

12. Observe que todo elemento de I_{2n} é da forma $2^k q$, com $k \geq 0$ e $q \in \{1,3,5,\ldots,2n-1\}$. Aplique o princípio da casa dos pombos, sendo as casas os n números 1, 3, 5, ..., $2n-1$ e os pombos os $n+1$ elementos escolhidos de I_{2n}.

13. Por contraposição, suponha que nenhum dos 15 inteiros escolhidos seja um número primo. Então, o corolário 1.35 de [14] garante que cada um desses 15 números tem um divisor primo menor ou igual que $\sqrt{1998} \approx 44,69$. Agora, observe que há exatamente 14 primos menores ou iguais que 44, quais sejam: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41 e 43. Mas, como escolhemos 15 números, o princípio da casa dos pombos garante que pelo menos dois deles, a e b digamos, serão divisíveis por um mesmo primo dessa lista. Logo, a e b não serão primos entre si.

14. Cada elemento $u \in A$ é do tipo $u = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5}$. Tome, como casas dos pombos, as possíveis sequências $(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4,\tilde{\alpha}_5)$, onde $\tilde{\alpha}_i = 0$ ou 1 para $1 \leq i \leq 5$; em seguida, ponha $u \in A$ na casa $(\tilde{\alpha}_1,\tilde{\alpha}_2,\tilde{\alpha}_3,\tilde{\alpha}_4,\tilde{\alpha}_5)$ se, e só se, α_i e $\tilde{\alpha}_i$ tiverem paridades iguais, para $1 \leq i \leq 5$.

15. O conjunto tem $2^{10}-1 = 1023$ subconjuntos não vazios. Por outro lado, a soma dos elementos do conjunto é, no máximo, $90+91+92+\cdots+99 = 945$. Portanto, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos dois subconjuntos do conjunto em questão, A e B, digamos, têm a mesma soma de elementos. Assim, $A \setminus (A \cap B)$ e $B \setminus (A \cap B)$ são disjuntos e continuam tendo a mesma soma de elementos.

16. Se $A \subset \{1,2,3,\ldots,2n+1\}$ é livre de somas, afirmamos que $|A| \leq n+1$. De fato, sendo $A = \{1,3,5,\ldots,2n+1\}$ temos que $|A| = n+1$ e A é livre de somas, uma vez que a soma de dois elementos quaisquer de A é um número par. Tome, agora, um subconjunto B do conjunto dado, tal que $|B| = n+2$; mostremos que B não é livre de somas. Se $B = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2}\}$, então

$$1 \leq x_{n+2} - x_{n+1} < \cdots < x_{n+2} - x_1 \leq 2n.$$

Se nenhuma das $n+1$ diferenças $x_{n+2}-x_i$ estiver em B, todas estarão em $\{1,2,3,\ldots,2n+1\} \setminus B$. Mas, como esse último conjunto só tem n elementos, pelo princípio da casa dos pombos ao menos dois dos números $x_{n+2}-x_i$ teriam de ser iguais, o que é uma contradição.

17. Afirmamos inicialmente que, dentre os $n+1$ elementos escolhidos, há necessariamente dois, x e y digamos, tais que $|x-y| \leq 2$; de

fato, para verificar uma tal afirmação, é suficiente aplicar o princípio da casa dos pombos ao distribuir os $n+1$ elementos escolhidos nos n conjuntos $\{3k-2, 3k-1, 3k\}$, com $1 \leq k \leq n$. Agora, sejam x e y dois dos números escolhidos tais que $|x-y| \leq 2$ e suponha, sem perda de generalidade, que $y > x$. Se $y-x=1$, então $4xy+1 = 4x(x+1)+1 = (2x+1)^2$. Se $y-x=2$, então $xy+1 = x(x+2)+1 = (x+1)^2$.

18. Mostremos que $f(n) = 2n$. Para tanto, seja

$$\{1, 2, \ldots, 2n\} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

uma partição arbitrária em n conjuntos. Como de n a $2n$ há $n+1$ inteiros, o princípio da casa dos pombos garante a existência de $n \leq u < v \leq 2n$ e $1 \leq i \leq n$ tais que $u, v \in C_i$. Tomando $a = 2u - v \geq 0$ e $x = y = v - u \geq 1$ temos que

$$\{a+x, a+y, a+x+y\} = \{u, v\} \subset C_i$$

e, daí, $f(n) \leq 2n$. Consideremos, agora, a partição em n conjuntos

$$\{1, 2, \ldots, 2n-1\} = \bigcup_{k=1}^{n-1} \{k, k+n\} \cup \{n\}$$

e mostremos que as condições do enunciado não são cumpridas. Com efeito, se

$$\{a+x, a+y, a+x+y\} = \{u, v\} \subset C_k = \{k, k+n\},$$

então $a+x = a+y = k$ e $a+x+y = k+n$, de sorte que $x = n$ e $a = k - x = k - n < 0$, o que é um absurdo. Por fim, basta ver que $\{a+x, a+y, a+x+y\}$ tem ao menos dois elementos e, portanto, não pode ser igual a $\{n\}$.

19. Para o item (a), suponha que as 21 casas do tabuleiro estão pintadas. Chame uma coluna de preta se ela tiver pelo menos 2 casas pintadas de preto, e de branca se ela tiver ao menos duas casas pintadas de branco. Temos, então, 7 colunas, cada uma das quais de um dentre

dois tipos; pelo princípio da casa dos pombos, há ao menos 4 colunas de um mesmo tipo. Sem perda de generalidade, podemos supor que há ao menos 4 colunas pretas e que essas são as 4 primeiras colunas, da esquerda para a direita. Se uma dessas 4 colunas for toda preta, nada mais haverá a fazer: basta tomar duas casas pretas de outra coluna para obter um retângulo com as quatro casas do canto pretas (veja a figura 6.1).

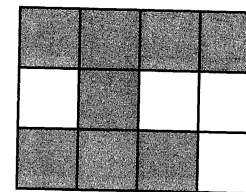



Figura 6.1: o primeiro caso do item (a)

Senão, em cada uma das 4 colunas há exatamente duas casas pretas. Numa mesma coluna, há três maneiras de escolhermos duas casas para pintar de preto: a primeira e a segunda, a primeira e a terceira ou a segunda e a terceira. Como temos 4 colunas, segue do princípio da casa dos pombos que ao menos duas delas são pintadas da mesma maneira. As casas pretas dessas duas colunas são as 4 casas dos cantos de um retângulo (veja a figura 6.2). Para o item (b), o número

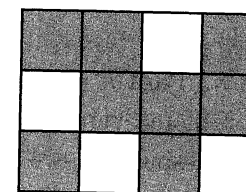



Figura 6.2: o segundo caso do item (a)

de modos de escolhermos 2 casas dentre 4 é $\binom{4}{2} = 6$. Assim, vamos

pintar exatamente duas casas de cada uma das seis colunas de preto, escolhendo as duas casas a serem pintadas de todas as maneiras distintas possíveis (i.e., casas 1 e 2, 1 e 3, 1 e 4, 2 e 3, 2 e 4, 3 e 4 – veja a figura 6.3).

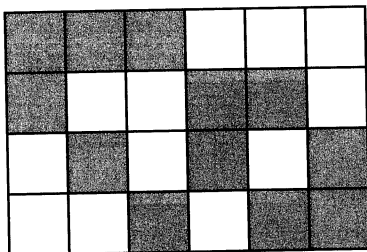



Figura 6.3: o caso do item (b)

20. Escolha uma pessoa qualquer, A digamos; pelo princípio da casa dos pombos, A se corresponde com pelo menos seis das outras dezesseis pessoas sobre um mesmo assunto. Analisando essas seis pessoas, há dois casos a considerar: ou há duas delas que se correspondem sobre o mesmo assunto que com A – e nada mais há a fazer – ou duas quaisquer delas se correspondem sobre um dentre os outros dois assuntos. Nesse último caso, repita o argumento inicial da sugestão, aplicando o princípio da casa dos pombos às seis pessoas e aos dois assuntos em questão.

21. Façamos indução sobre n. Para $n = 1$ podemos tomar $k_1 = 3$. Supondo a conclusão do problema verdadeira para $n = l$, considere um conjunto de m pontos no espaço, 4 a 4 não coplanares, tendo cada segmento que une dois desses pontos associado a si um dos números $1, 2, \ldots, l, l+1$. Fixemos um qualquer desses m pontos, A digamos, e olhemos os $m-1$ segmentos que unem A aos $m-1$ pontos restantes. Como cada um desses $m-1$ segmentos tem associado a si um dentre $l+1$ números, segue do princípio da casa dos pombos que um desses $l+1$ números, x digamos, está associado a pelo menos

$$M = \left\lfloor \frac{(m-1)-1}{l+1} \right\rfloor - 1$$

segmentos distintos. Se $M \geq k_l$, podemos escolher pontos A_1, A_2, $\ldots$, A_{k_l} tais que os segmentos AA_i $(1 \leq i \leq k_l)$ têm associados a si o número x. Olhemos, agora, os segmentos que unem os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{k_l}$ dois a dois. Se um deles, A_iA_j digamos, tiver x associado a si, nada mais haverá a fazer: AA_iA_j será um triângulo com x associado a todos os seus lados. Senão, os pontos $A_1, A_2, \ldots, A_{k_l}$ serão k_l pontos no espaço, 4 a 4 não coplanares, com um dos l números $1, \ldots, x-1, x+1, \ldots, l+1$ associado a cada segmento unindo dois deles. Por hipótese de indução, segue a existência de um triângulo como pedido. Para terminar, basta notar que $M \geq k_l$ para $m \geq (l+1)(k_l - 1) + 2$.

Seção 4.3

1. Aplique o teorema de Dilworth.

2. Adapte, ao presente caso, a demonstração do teorema 4.20.

3. Faça indução sobre m, observando que o caso $m = 1$ corresponde ao caso $a = b$ no teorema de Erdös-Szekeres. Para o passo de indução, escreva $n^{2^m} + 1$ como $(n^2)^{2^{m-1}} + 1$ e use novamente o teorema de Erdös-Szekeres.

Seção 4.4

1. Mostre que o discriminante do trinômio, antes e depois de cada operação, é um invariante para o problema.

2. Não! Como cada peça cobre uma casa branca e uma preta, após colocarmos uma quantidade qualquer de peças, o número de casas brancas cobertas coincide com o número de casas pretas cobertas (esse é o invariante). No entanto, ao retirarmos do tabuleiro duas casas de cantos opostos, ele passa a contar com 32 casas de uma cor e 30 de outra; portanto, não pode ser coberto como se pede.

3. Sejam S_j a soma dos números escritos antes da $j-$ésima jogada e a e b os números apagados na $k-$ésima jogada. Sem perda de generalidade, suponha que $a > b$. Então,

$$S_j - S_{j+1} = (a+b) - (a-b) = 2a \equiv 0 \,(\text{mod}\, 2),$$

de modo que a paridade de S_j é um invariante associado às jogadas. Mas, como

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + 1997 = 999 \cdot 1999,$$

o qual é um número ímpar, segue que S_j será sempre ímpar. Em particular, quando restar um só número, ele será ímpar.

4. Se a, b, c e a', b', c' denotam os números escritos em três posições correspondentes, respectivamente antes e depois de uma operação qualquer, mostre que

$$a' + b' + c' \equiv a + b + c \,(\text{mod}\, 7).$$

Em seguida, observe que as possíveis somas de três termos consecutivos da sequência $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ nunca são congruentes, módulo 7, às somas correspondentes de termos da sequência $(3, 7, 2, 15, 8, 8)$.

5. Numere as moedas, consecutivamente, de 1 a 10. Associe a cada moeda o *peso* 0, se a face virada para cima for *cara*, ou o *peso* igual ao número de sua posição, se a face voltada para cima for *coroa*. Em seguida, mostre que um movimento qualquer não muda a paridade da soma dos pesos associados às moedas.

6. Observe que $a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$. Portanto, se, em um certo instante, os números escritos na lousa forem $x_1, x_2, \ldots, x_k$, então o valor da expressão $(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_k+1)$ é um invariante. De início, o valor dessa expressão era $(1+1)(2+1)\ldots(n+1) = (n+1)!$; portanto, sendo x o número escrito na lousa após $n-1$ operações, temos $x+1 = (n+1)!$, de sorte que $x = (n+1)! - 1$.

7. Não! Para provar isso suponha que, em algum momento, tenhamos a, b, c e d fichas nos vértices do quadrado, percorrido no sentido horário. Após uma operação qualquer que consista em retirar k fichas de um dos vértices, a distribuição de fichas assume uma das seguintes configurações:

$$(a-k, b+2k, c, d), \quad (a-k, b, c, d+2k), \quad (a+2k, b-k, c, d), \quad \text{etc.}$$

Defina

$$f(a, b, c, d) = a - b + c - d.$$

Sendo a', b', c' e d' as quantidades correspondentes de fichas nos vértices do quadrado, após uma operação, obtemos

$$f(a', b', c', d') - f(a, b, c, d) = \pm 3k,$$

de sorte que

$$f(a', b', c', d') \equiv f(a, b, c, d) \,(\text{mod}\, 3).$$

Assim, a o resto da divisão de $f(a, b, c, d)$ por 3 é um invariante associado às operações com as fichas. Agora, se houvesse sequência de operações entre os estados prescritos no enunciado, deveríamos ter

$$f(1, 9, 8, 9) \equiv f(1, 0, 0, 0) \quad \text{ou} \quad f(1, 9, 8, 9) \equiv f(0, 1, 0, 0) \,(\text{mod}\, 3),$$

o que é um absurdo.

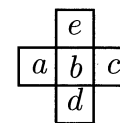
8. Comece traçando n segmentos quaisquer, satisfazendo a condição (i) e com extremidades todas distintas. Em seguida, sejam A_1 e A_2 pontos azuis e V_1 e V_2 pontos vermelhos, tais que A_1V_1 e A_2V_2 são dois dos segmentos traçados; se $A_1V_1 \cap A_2V_2 \neq \emptyset$, troque-os pelos segmentos A_1V_2 e A_2V_1 e use a desigualdade triangular para mostrar que a soma

dos comprimentos dos segmentos traçados diminui. Use a finitude do conjunto de pontos dados, juntamente com o semiinvariante descrito acima, para mostrar que esse algoritmo de trocas de segmentos para em algum momento. Por fim, mostre que, em um tal momento, a condição (ii) também será satisfeita.

9. A ganhará. Para ver porque, pinte os cubinhos unitários de preto e branco, como em um tabuleiro de xadrez, e considere os dois seguintes casos: • n é par: agrupe os cubinhos em $n^3/2$ blocos $1 \times 1 \times 2$ e faça A começar em um cubinho branco, se movendo para o cubinho preto do mesmo bloco $1 \times 1 \times 2$; • n é ímpar: assuma, sem perda de generalidade, que os cubinhos unitários situados nos *cantos* do cubo de aresta n são pretos. Ignore um desses cubinhos e agrupe os $n^3 - 1$ cubinhos restantes em $(n^3 - 1)/2$ blocos $1 \times 1 \times 2$. A começa de um cubinho branco de um bloco, seguindo a estratégia do primeiro caso.

10. Para o item (a), numere as casas do tabuleiro, módulo 4, como mostrado na tabela abaixo, observando que há 16 casas com cada número de 0 a 3. Qualquer que seja a posição da peça colocada (eis aí o invariante!), ela ocupará quatro casas tais que a soma dos números nelas escritos é um múltiplo de 4.

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

Para o item (b), considere cinco casas do tabuleiro, dispostas como na figura abaixo: Se fosse possível dispor as peças de modo a que as condições do enunciado fossem satisfeitas, deveríamos ter, módulo 4, que $a+b+c+d \equiv a+b+d+e \equiv a+b+c+e \equiv d+c+d+e$. Portanto, deveria ser $a \equiv c \equiv d \equiv e \pmod 4$. Verifique que isso implicaria que 30

casas do tabuleiro deveriam ter números todos congruentes, módulo 4, o que é impossível.

11. Em toda disposição dos cubos sobre a mesa, tal que as faces inferiores formem o bordo de um quadrado 6×6, cada cubo tem 3 faces visíveis e 3 faces não visíveis. Para uma tal disposição dos cubos, sejam v_B e v_P, respectivamente, os números de faces brancas e pretas visíveis. Como

$$|v_B - v_P| \equiv v_B - v_P \equiv v_B + v_P = 60 \equiv 0 \pmod 2,$$

concluímos que $|v_B - v_P|$ é par. Portanto, se $v_B > v_P$, então $v_B \geq 31$ e $v_P \leq 29$. Se, para cada cubo, o número de faces pretas visíveis for maior ou igual que o número de faces brancas visíveis, então teremos no mínimo tantas faces pretas visíveis quantas faces brancas visíveis, o que é um absurdo. Logo, há ao menos um cubo com mais faces pretas não visíveis do que visíveis. Agora, mostre que é possível mudar a posição desse cubo de tal forma que $|v_B - v_P|$ diminua duas unidades.

12. Veja que, após qualquer número de operações, a quantidade n de números escritos não muda. Por outro lado, graças à propriedade a qual fizemos alusão antes do enunciado do problema, o produto P dos números escritos na lousa também não muda após um número qualquer de operações. Como só há um número finito modos de representarmos P como o produto de n inteiros positivos, segue que existe um maior inteiro positivo m que aparece, em algum momento, na lousa. Afirmamos que tal inteiro m divide todos os demais números escritos na lousa nesse momento. Por absurdo, suponha que exista, nesse momento, algum número k escrito na lousa e que não seja um divisor de m. Como $\text{mmc}\,(m,k) > m$, trocando m e k por $\text{mdc}\,(m,k)$ e

mmc(m,k), concluímos que m não seria o maior número possível a aparecer na lousa, o que é um absurdo. Pela afirmação acima, quando m aparece na lousa os números escritos são

$$m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n = m,$$

onde $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$ dividem m. Agora, vejamos o que acontece após uma operação qualquer: se escolhermos m_j e m, nada vai mudar, pois, uma vez que $m_j \mid m$, temos

$$\text{mdc}(m_j, m) = m_j \quad \text{e} \quad \text{mmc}(m_j, m) = m.$$

De outra forma, para todos os efeitos práticos é como se estivéssemos fazendo operações somente com $m_1, \ldots, m_{n-1}$. Podemos, então, usar o mesmo argumento acima com tais números, sucessivas vezes, e concluir que, após um número finito de operações, chegamos a números $x_1, \ldots, x_n$ tais que

$$x_1 \mid x_2 \mid \cdots x_{n_1} \mid x_n.$$

A partir daí, nada muda.

Seção 5.1

1. Considere um grafo cujos vértices são os 100 convidados e no qual dois vértices são adjacentes se, e só se, os convidados correspondentes se conhecem. Em seguida, aplique o resultado do corolário 5.6.

2. Analise os possíveis graus dos vértices de um grafo com n vértices e, em seguida, use o princípio da casa dos pombos. Você pode achar útil rever a discussão do exemplo 4.7.

3. Suponha sem perda de generalidade, que $V_1 = V_2 = I_n$, para um certo $n \in \mathbb{N}$. Se $f : I_n \to I_n$ for um isomorfismo entre G_1 e G_2, então f é uma permutação de I_n; mostre que, aplicando f às linhas de Adj(G_1), obtemos Adj(G_2). Para a recíproca, argumente de maneira análoga.

4. Sejam dados grafos $G_1 = (V_1; E_1)$, $G_2 = (V_2; E_2)$ e $G_3 = (V_3; E_3)$. Se $f : V_1 \to V_2$ (resp. $g : V_2 \to V_3$) for um isomorfismo entre G_1 e G_2 (resp. entre G_2 e G_3), mostre que $f^{-1} : V_2 \to V_1$ (resp. $g \circ f : V_1 \to V_3$) é um isomorfismo entre G_2 e G_1 (resp. entre G_1 e G_3). Para a reflexividade, use a identidade, Id $: V_1 \to V_1$.

5. Se $V = \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $G = (V; E)$ é um grafo rotulado, então $E \subset \mathcal{P}_2(V)$; reciprocamente, dado $E \subset \mathcal{P}_2(V)$, obtemos um grafo rotulado $G = (V; E)$. Portanto, é suficiente contarmos quantos são os possíveis subconjuntos E de $\mathcal{P}_2(V)$. Mas, como $\#\mathcal{P}_2(V) = \binom{n}{2}$, concluímos que o número de grafos rotulados $G = (V; E)$ é $2^{\binom{n}{2}}$.

6. Suponha que existe um tal grafo, G digamos, e sejam a e b seus vértices de grau 1 e c seu vértice de grau 6. Uma vez que o grafo tem sete vértices, c deve ser adjacente a a e b. Portanto, se H é o grafo obtido de G pela excisão de a e b, então H tem cinco vértices, cujos graus são 2, 3, 4, 5 e 4 (lembre-se de que c perdeu duas arestas). Mas isso é um absurdo, uma vez que, em H, temos um vértice de grau 5 que pode ter, no máximo 4 vizinhos.

7. Comece a tentar construir o grafo impondo que o vértice de grau 3 não seja adjacente ao vértice de grau 6. Observe, então, que o vértice de grau 6 deve ser adjacente aos vértices de graus 1, 1, 2, 4, 4 e 5.

8. O item (a) segue do fato de que, fixados $u, v \in V$, temos $uv \in E$ ou $uv \in E^c$; portanto, $N_G(u) \cap N_{\overline{G}}(u) = \emptyset$ e $N_G(u) \cup N_{\overline{G}}(u) = V \setminus \{u\}$, de sorte que

$$d_G(u) + d_{\overline{G}}(u) = \#(N_G(u) \cup N_{\overline{G}}(u)) = \#(V \setminus \{u\}) = n - 1.$$

Para o item (b), basta observar que $E \cap E^c = \emptyset$ e $E \cup E^c = \mathcal{P}_2(V)$, de sorte que

$$|E| + |E^c| = |E \cup E^c| = |\mathcal{P}_2(V)| = \binom{n}{2}.$$

9. Sendo $G = (V; E)$ autocomplementar, temos $|E| = |E^c|$. Portanto, segue do item (b) do problema anterior que

$$|E| = \frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

de sorte que $4 \mid n(n-1)$. Agora, como exatamente um dos números n e $n-1$ é par, temos que $4 \mid n$ ou $4 \mid (n-1)$, i.e., n deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 4.

10. $G - B = (V \setminus B; E')$, onde E' é o conjunto das arestas de G que não incidem em nenhum vértice de B. $G - A = (V; E \setminus A)$.

11. Para o item (a), note inicialmente que tanto $G - u$ quanto $G_{|V(G)\setminus\{u\}}$ têm $V(G) \setminus \{u\}$ como conjunto de vértices. Agora, se ϵ é uma aresta de G, então ϵ é aresta de $G - u$ se, e só se, ϵ não incide em u, o que é o mesmo que pedir que ϵ seja uma aresta de $G_{|V(G)\setminus\{u\}}$. Por fim, a demonstração do item (b) é análoga àquela do item (a), utilizando a discussão do problema anterior.

12. Os únicos vértices de G que mudam de grau em H são u e v, o fazendo de forma que $d_H(u) = d_G(u) + 1$ e $d_H(v) = d_G(v) + 1$. Há, agora, três possibilidades essencialmente distintas: (i) u e v têm graus ímpares em G: então u e v têm graus pares em H, de forma que H tem dois vértices de grau ímpar a menos que G; (ii) u e v têm graus pares em G: então u e v têm graus ímpares em H, de forma que H tem dois vértices de grau ímpar a mais que G; (iii) u tem grau par e v tem grau ímpar em G: então u tem grau ímpar e v tem grau par em H, de forma que H tem exatamente a mesma quantidade de vértices de grau ímpar que G. Para a segunda parte, comecemos com um grafo $G = (V; E)$, com $E = \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m\}$. Para $0 \leq k \leq m$, seja $G_k = (V; E_k)$, com $E_k = \{\epsilon_{k+1}, \ldots, \epsilon_m\}$, para $0 \leq k < m$, e $E_m = \emptyset$. Se v_k denota o número de vértices de grau ímpar em G_k, então $v_m = 0$ e, daí,

$$v_0 = \sum_{k=0}^{m-1}(v_k - v_{k+1}) + v_m = \sum_{k=0}^{m-1}(v_k - v_{k+1}).$$

Mas, pela primeira parte do problema, temos que $v_k - v_{k+1} = -2, 0$ ou 2, de sorte que $v_k - v_{k+1}$ sempre é um número par. Logo, v_0 é uma soma de parcelas pares, de modo que também é par.

13. O item (a) será deixado a cargo do leitor. Para o item (b), se $m = 2n$ e $1 \leq i, j \leq 2n$, então

$$\{i, j\} \in E \Leftrightarrow j \equiv i \pm n (\mathrm{mod}\, 2n).$$

Conclua, a partir daí, que o vértice $i + n$ (módulo $2n$) é o único vizinho do vértice i; também as arestas de $G(2n, n)$ são aquelas que ligam i a $i+n$, para $1 \leq i \leq n$, de sorte que há exatamente n arestas. Para o item (c), dado $1 \leq i \leq m$, mostre que i é adjacente a $i + n$ e $i - n$ (módulo m) e que $i + n \neq i - n$ (módulo m), de sorte que $d(i) = 2$; para o que falta, use o teorema de Euler para concluir que $|E| = m$. Por fim, quando ao item (d), mostre que $\mathrm{Id} : I_m \to I_m$ é um isomorfismo entre $G(m, n)$ e $G(m, m - n)$.

14. Verifique que o grafo desejado é aquele da figura 5.4.

15. Note inicialmente que, pela condição de bipartição, para $u, v \in V$ temos $uv \in E \Rightarrow u \in V_1$ e $v \in V_2$, ou vice-versa. Portanto, podemos identificar E com um subconjunto de $V_1 \times V_2$, mediante a injeção $uv \mapsto (u, v)$, se $u \in V_1$ e $v \in V_2$. Logo, $|E| \leq |V_1 \times V_2| = |V_1| \cdot |V_2|$, ocorrendo a igualdade se, e só se, $E = V_1 \times V_2$.

16. Se $|V_1| = |W_1|$ e $|V_2| = |W_2|$, tome bijeções $f_1 : V_1 \to W_1$ e $f_2 : V_2 \to W_2$; em seguida, defina $f : V_1 \cup V_2 \to W_1 \cup W_2$ pondo $f_{|V_1} = f_1$ e $f_{|V_2} = f_2$, e mostre que f é uma bijeção que preserva incidência. Reciprocamente, seja $f : V_1 \cup V_2 \to W_1 \cup W_2$ uma bijeção que preserva incidência. Como V_1 é um conjunto independente, o mesmo sucede com $f(V_1)$. Portanto, $f(V_1)$ não pode intersectar ambos W_1 e W_2, de forma que $f(V_1) \subset W_1$ ou $f(V_1) \subset W_2$. Suponha que $f(V_1) \subset W_1$ (o outro caso é análogo). Como todo vértice em V_2 é adjacente a todo vértice em V_1, concluímos que todo vértice em $f(V_2)$ é adjacente a todo vértice em $f(V_1) \subset W_1$; então, segue do fato de W_1 ser um

conjunto independente que $f(V_2)$ não intersecta W_1, i.e., $f(V_2) \subset W_2$. Agora,

$$\begin{aligned}|V_1 \cup V_2| &= |f(V_1 \cup V_2)| = |f(V_1)| + |f(V_2)| \\ &\leq |W_1| + |W_2| = |W_1 \cup W_2| = |V_2 \cup V_2|,\end{aligned}$$

onde a última igualdade se deve ao fato de que f é um isomorfismo. Portanto, $|f(V_1)| = |W_1|$ e $|f(V_2)| = |W_2|$, de maneira que $f(V_1) = W_1$ e $f(V_2) = W_2$. Finalmente, segue daí que $|V_1| = |W_1|$ e $|V_2| = |W_2|$.

18. Suponha que G tem l vértices de grau 5 em V_1 e k vértices de grau 8, de sorte que $|V_1| = k + l$ e $|V_2| = 16 - l$. Como o grafo é bipartido, as arestas que partem de um vértice de V_1 incidem em um vértice de V_2, e vice-versa; portanto, $8k + 5l = 5(16 - l)$ ou, ainda, $4k + 5l = 40$. É imediato verificar que as soluções inteiras não negativas dessa equação para as quais $k > 0$ são $(k, l) = (5, 4)$ ou $(10, 0)$. Para cada um de tais casos, exiba um grafo bipartido correspondente.

19. Para o item (a), aplique o teorema de Euler. Para o item (b), há dois casos a considerar: (i) se $r = 2m$ é par, disponha os n vértices ao redor de um círculo, como os vértices de um $n-$ágono regular; em seguida, ligue cada vértice aos m vértices mais próximos, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário; (ii) se $r = 2m + 1$ é ímpar, então n é par; disponha os n vértices ao redor de um círculo, como os vértices de um $n-$ágono regular; em seguida, ligue cada vértice aos m vértices mais próximos, tanto no sentido horário quanto no sentido anti-horário, assim como ao vértice oposto a ele.

20. Sejam $P_1, P_2, \ldots, P_{11}$ as patrulhas, $h_1, h_2, \ldots, h_n$ os homens e ligue h_i a P_j por um segmento se h_i for um integrante da patrulha P_j. Sejam, ainda, k o número de voluntários em cada patrulha e A_i o conjunto dos homens da patrulha P_j. Como temos um total de n homens, segue que

$$n = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{11}|.$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão, temos

$$\begin{aligned}n &= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{11}| \\ &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots .\end{aligned}$$

Porém, como nenhum homem pertence a três ou mais patrulhas, as únicas parcelas não nulas na soma acima são as duas primeiras, de sorte que

$$n = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| = 11k - \binom{11}{2} = 11k - 55.$$

Agora, contemos o número de segmentos de dois modos distintos: por um lado, como partem 2 segmentos de cada homem, temos um total de $2n$ segmentos; por outro lado, como partem k segmentos de cada patrulha, o total de segmentos também é igual a $11k$. Assim, $2n = 11k$. Resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} n = 11k - 55 \\ 2n = 11k. \end{cases}$$

obtemos $n = 55$ e $k = 10$. Portanto, há 55 voluntários e 10 voluntários por patrulha.

21. Para o item (a), adapte o argumento utilizado na solução do problema anterior para obter $g = m - 1$ e $n = \binom{m}{2}$. Para o item (b), ponha $V_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $V_2 = \{b_{j,k};\ 1 \leq j < k \leq m\}$ e faça a_i adjacente a $b_{j,k}$ se, e só se, $i \in \{j, k\}$.

22. Pense na situação em questão como um grafo bipartido G, tal que os elementos dos conjuntos independentes de vértices são os estudantes e os problemas, sendo um estudante e um problema adjacentes se, e só se, o estudante resolveu o problema. Se cada problema foi resolvido por k estudantes, aplique contagem dupla para concluir que $k = \frac{x}{2}$. Agora, sejam E o conjunto dos estudantes, $e \in E$ e P o conjunto dos y problemas resolvidos por e. Se H é o subgrafo de G induzido por

$(E\setminus\{e\})\cup P$ (cf. problema 11), então H também é bipartido; aplique contagem dupla a H para concluir que $3(x-1)=y\left(\frac{x}{2}-1\right)$. Deduza, então, que $(x,y)=(4,9)$ ou $(8,7)$. Por fim, os grafos correspondentes a tais possibilidades podem ser facilmente construídos a partir das matrizes A do problema 17, listadas abaixo:

(i) $(x,y)=(4,9)$:

$$A=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1\\ 1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

(ii) $(x,y)=(8,7)$:

$$A=\begin{bmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&1&1&1&0&0&1&0&0&1&1&0&1\\ 1&1&0&0&1&0&0&0&1&1&1&1&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0&1&0&1&0&1&1\\ 1&0&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&1&1&0&0&0&1&1&0&1&1&0&1&0\\ 0&1&0&1&0&0&1&0&1&0&0&1&1&1 \end{bmatrix}.$$

23. Suponha, por absurdo, que haja uma maneira de distribuir os números ao redor do círculo, e considere o grafo $G=(V;E)$, tal que $V=\{1,2,\ldots,13\}$ e $\{x,y\}\in E$ se, e só se, x e y forem números vizinhos no círculo. Então, G é um grafo com 13 vértices e 13 arestas, no qual cada um dos vértices tem grau 2. Agora, considere os conjuntos de vértices $A=\{1,2,3,4,10,11,12,13\}$ e $B=\{5,6,7,8,9\}$; podemos ter no máximo duas arestas ligando pares de elementos de A: uma ligando 1 e 4 e outra 10 e 13. Como temos ao todo 13 arestas, duas partindo de cada vértice, segue que ao menos $4\cdot 2+4\cdot 1=12$ arestas ligam elementos de A a elementos de B. Mas, como B tem cinco elementos, o princípio da casa dos pombos garante que ao menos um desses cinco elementos deve recebe pelo menos três arestas, o que é um absurdo.

24. Dado um caminho ótimo $\mathcal{C}=(c_0,c_1,\ldots,c_{n^2-1})$, diremos que um lado de uma casa 1×1 é *atravessado* se ele for lado comum a duas casas consecutivas c_i e c_{i+1} do caminho. Considere o grafo G que tem por vértices os $(n+1)^2$ vértices de todas as casas 1×1 do tabuleiro. Classifiquemos tais vértices em três tipos: (I) os quatro vértices dos cantos do tabuleiro.; (II) os demais $4(n-1)$ vértices do bordo do tabuleiro; (III) os $(n-1)^2$ vértices interiores ao tabuleiro. As arestas de G são os lados das casas 1×1 que são atravessados. Assim, sendo d_v o grau do vértice v, temos $d_v\leq 3$ para todo v. Agora, note que o caminho $\mathcal{C}$ contém um U se, e somente se, o grau de algum vértice for igual a 3. Suponha, por absurdo, que o caminho não contenha um U e conclua, com o auxílio do teorema de Euler, que se m é o número de arestas atravessadas, então $m\leq n^2-1$. Em seguida, mostre que $m=n^2-1$ e conclua que o grau de cada vértice de tipo (II) é 1, o que é claramente impossível.

25. Para o item (a), mostre que $\sum_{u\in V}d^+(u)$ conta cada subconjunto de dois vértices exatamente uma vez. O item (b) segue diretamente de (a). Para o item (c), mostre que se (u,v) e (u,w) são arestas de G, então há exatamente um K_3 transitivo em G envolvendo u, v e w; conclua, a partir daí, que o número de K_3's transitivos em G nos quais u participa com grau de saída 2 é igual a $\binom{d^+(u)}{2}$. Para o item (d), note que o número de K_3's em G é exatamente $\binom{n}{3}$; em seguida, utilize os resultados dos itens (c) e (a). Para o item (e), substitua $d^+(u)=(d^+(u)-\overline{d}^+)+\overline{d}^+$ na fórmula do item (d) e desenvolva a expressão assim obtida, utilizando, quando conveniente, o resultado do item (b).

26. Interprete a situação à luz do problema anterior para concluir que o número de conjuntos que se pede calcular é, no máximo, 112. Em seguida, explicite uma tabela de resultados dos $\binom{14}{2}=91$ jogos, mostrando que é realmente possível termos 112 conjuntos de três jogado-

res satisfazendo as condições do enunciado.

Seção 5.2

1. Para o item (a), se $A = (a_{ij})$, use a definição de matriz de adjacência para mostrar que uma parcela genérica $a_{ik}a_{kj}$ da soma que define a entrada ij de A^2 é igual a 1 se, e só se, o vértice v_k é adjacente a ambos os vértices v_i e v_j. Para o item (b), faça indução sobre k. Por fim, para o item (c), use o resultado de (b) e adapte o argumento dado ao item (a).

2. Mostre que H coincide com o subgrafo conexo maximal de G que contém u.

3. Para a primeira parte, suponha, por contraposição, que G tem pelo menos duas componentes conexas, de sorte que G seja a união de dois subgrafos disjuntos H_1 e H_2, respectivamente com k e l vértices. Use o fato de que $k + l = n$, juntamente com a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética (cf. problema 7.3.3 de [11]) para provar que $\binom{k}{2} + \binom{l}{2} \leq \binom{n-1}{2}$.

4. Utilize o resultado da primeira parte do problema anterior.

5. Use a observação anterior ao enunciado para provar, inicialmente, que todo vértice de $G(m, n)$ pertence à componente conexa de um dos vértices 1, 2, ..., d.

6. Se G tem duas componentes conexas H_1 e H_2, então todo vértice de H_1 é adjacente a todo vértice de H_2 em $\overline{G}$, de sorte que $\overline{G}$ contém o subgrafo bipartido completo cujos conjuntos de vértices são $V(H_1)$ e $V(H_2)$. Em particular, $\overline{G}$ é conexo. O resto é imediato.

7. Crie um *algoritmo de redução de passeios* que, como resultado final, dê um caminho entre os dois vértices escolhidos. Essencialmente, um tal algoritmo deve eliminar, de um dado passeio, toda porção da forma $(v = v_0, v_1, \ldots, v_k = v)$.

8. Execute, para o grafo em questão, o algoritmo delineado na prova do teorema 5.23.

9. Adapte, ao presente caso, a prova do teorema 5.23.

10. Sejam $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dois caminhos em G, cujos comprimentos são os maiores possíveis. Por contradição, suponha que $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ não têm vértice algum em comum. Tome um caminho $\mathcal{C}$ em G, ligando um vértice de $\mathcal{C}_1$ a um vértice de $\mathcal{C}_2$ e tendo o menor comprimento possível; mostre que $\mathcal{C}$ tem somente um vértice em comum com $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Agora, concatene uma porção de $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}$ e uma porção de $\mathcal{C}_2$ para construir um caminho em G de comprimento maior do que o comprimento de $\mathcal{C}_1$ ou $\mathcal{C}_2$.

11. Há $\binom{n}{k-1}$ maneiras de escolher $k - 1$ dos vértices $u_1, \ldots, u_n$, e cada uma de tais escolhas geral $(k-1)!$ caminhos com as propriedades do enunciado. Use, agora, o princípio aditivo.

12. Adapte, ao presente caso, a prova do teorema 5.23, a fim de construir um ciclo no grafo em questão.

13. Use o resultado do problema anterior.

14. Sejam A, B, C, D, E os matemáticos e respectivamente A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2 os intervalos de tempo durante os quais eles dormiram. Construa um grafo tendo esses intervalos por vértices, tal que dois vértices são adjacentes se, e só se, os intervalos de tempo correspondentes tiverem interseção. Mostre que tal grafo contém um ciclo.

15. Comece atribuindo os rótulos $1, 2, \ldots, n$ a um passeio maximal em G, que não passa por uma mesma aresta duas vezes.

16. Afirmamos, inicialmente, que $G - \epsilon$ tem no máximo duas componentes conexas. Para tanto, sejam $\epsilon = \{u, v\}$ e $w \neq u, v$ outro vértice de G. Como G é conexo, temos em G um caminho $\mathcal{C}$, ligando w a u. Há, então, duas possibilidades: (i) $\mathcal{C}$ não passa por ϵ: então, temos em $G - \epsilon$ um caminho ligando w a u; (ii) $\mathcal{C}$ passa por ϵ: como os

vértices de $\mathcal{C}$ são distintos e u é o último deles, o penúltimo deve, necessariamente, ser v; portanto, parando o caminho $\mathcal{C}$ em v, obtemos um caminho em $G-\epsilon$, ligando w a v. De qualquer modo, todo vértice em $G-\epsilon$ pode ser ligado a u ou v por um caminho em $G-\epsilon$, de maneira que $G-\epsilon$ tem, no máximo, duas componentes conexas: uma contendo u e outra contendo v. Afirmamos, agora, que $G-\epsilon$ contém pelo menos duas componentes conexas. De fato, se $G-\epsilon$ fosse conexo, teríamos nele um caminho de u a v, necessariamente com comprimento maior ou igual a 2; adicionando a aresta ϵ a tal caminho, obteríamos um ciclo em G, o que é um absurdo.

17. Seja u o vértice de G com grau de saída máximo. Se a aresta ligando u a v for orientada de u para v, nada mais haverá a fazer; senão, prove que $d^+(u) + d^-(v) \geq n-1$ e conclua, a partir daí, pela existência de $w \in N_G^+(u) \cap N_G^-(v)$.

18. Para o item (a), numere as cidades de 1 a n e oriente a estrada ligando as cidades i e j, com $i < j$, de i para j. Para o item (b), suponha que o mago realizou seu intento de algum modo e note que, se fosse sempre possível sair de toda cidade, então, eventualmente, chegar-se-ia a uma cidade já visitada, o que é um absurdo. Conclua que existe uma cidade da qual não se pode sair, rotule tal cidade como a cidade n e a exclua da análise subsequente do problema. Se fosse sempre possível sair de cada uma das outras $n-1$ cidades para uma outra delas, obtenha uma contradição análoga à anterior. Então, conclua que há uma das $n-1$ cidades restantes tal que, dela, não se pode sair para outra das $n-1$ cidades (i.e., dela, só se pode ir para a cidade n). Rotule tal cidade como a cidade $n-1$ e a exclua da análise subsequente do problema. Repita o argumento acima até que reste somente uma cidade e conclua que, a partir desta, pode-se ir a qualquer outra cidade. Por fim, para o item (c), use a demonstração de (b) para concluir que todo esquema possível é igual, a menos de isomorfismo, àquele do item (a). A partir daí, mostre que há $n!$ maneiras do mago realizar seu intento.

19. Sejam $u_1, u_2, \ldots, u_n$ os vértices do grafo e $d_1, d_2, \ldots, d_n$ seus respectivos graus; sejam, ainda, $d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{id_i}$ os graus dos vértices adjacentes a u_i. Por contradição, suponha que

$$\frac{d_{i1} + d_{i2} + \cdots + d_{id_i}}{d_i} < \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{n}.$$

Então,

$$\sum_{i=1}^{n}(d_{i1} + d_{i2} + \cdots + d_{id_i}) < \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)\sum_{i=1}^{n} d_i = \frac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n}.$$

Mas, como cada termo d_{ij} do primeiro membro é contado d_{ij} (uma vez para cada um dos d_{ij} vizinhos do vértice que tem grau d_{ij}), segue que

$$d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 < \frac{(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)^2}{n}.$$

Mas isso contradiz a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética (cf. seção 7.2 de [11]).

21. Comece notando que tal problema é uma generalização natural do problema 3. Em seguida, adapte, para ele, a discussão do exemplo 2.29 e a sugestão dada ao problema 18, página 43.

22. Sendo G um grafo satisfazendo as condições do enunciado, fixe um vértice u de G e conte seus vizinhos e os vizinhos de seus vizinhos para concluir que $k \geq 5$. Se $k = 5$ e conclua que tal contagem computou exatamente um vértice de G duas vezes, e que tal vértice nem é u nem é um vizinho de u. Então, mostre que u pertence a um único 4−ciclo em G e, pela arbitrariedade de u, conclua que G pode ser particionado em 4−ciclos, o que é um absurdo. Se $k = 6$, construa um grafo G de 25 vértices do seguinte modo:

- o conjunto V dos vértices de G é a união (disjunta) $V = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$, onde cada A_i é um conjunto de cinco vértices e o subgrafo G_i de G induzido por A_i é um 5−ciclo.

- para $1 \leq i < j \leq 5$, estabeleça uma bijeção $\phi_{ij} : A_i \to A_j$ tal que, se $x, y \in A_i$ são adjacentes em G_i, então $\phi_{ij}(x)$ e $\phi_{ij}(y)$ não são adjacentes em G_j. Em seguida, imponha que x e $\phi_{ij}(x)$ sejam adjacentes em G, para todos x, i e j como acima.

Por fim, mostre que o grafo G assim construído satisfaz as condições do enunciado.

23. Interprete o problema em termos da teoria dos grafos, do seguinte modo: associe um vértice a cada sala e ponha uma aresta entre dois vértices se, e só se, houver uma porta entre as salas correspondentes. Para duas fileiras de n salas cada, a condição do problema será satisfeita se, e só se, o grafo de $2n$ vértices resultante, digamos G_n, for conexo. Se a_n é o número de grafos conexos G_n satisfazendo as condições do enunciado, verifique inicialmente que $a_1 = 1$ e $a_2 = 5$. Em seguida, use um argumento recursivo para mostrar que $a_{n+1} = 4a_n + b_n$, onde b_n é o número grafos G_n com exatamente duas componentes conexas. Mostre, por fim, que $b_n = 1 + 2a_1 + 2a_2 + \cdots + 2a_{n-1}$ e conclua, a partir daí, que $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 2a_n$, para todo $n \geq 1$.

Seção 5.3

1. Para a equivalência entre (a), (b) e (c), prove que (a)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(a). Para a segunda parte segue das equivalências estabelecidas que o número de caminhos distintos em uma árvore com n vértices é igual ao número de modos de escolhermos dois desses vértices.

2. Se u é um vértice de T com grau k, mostre que $T - u$ tem k componentes conexas, as quais também são árvores. Em seguida, utilize o resultado do lema 5.32.

3. Para o item (a), use o resultado da proposição 5.33. Para o item (b), mostre que, se $T \cup \{\epsilon\}$ não contivesse ciclos, então T não seria uma árvore geradora de G. Para o item (c), suponha que G não é uma árvore e, portanto, que contém algum ciclo; mostre que G teria pelo menos duas árvores geradoras.

4. Adapte, ao presente caso, a demonstração da correção do algoritmo de Kruskal (cf. demonstração da proposição 5.36), mostrando que o algoritmo de Dijkstra constrói uma árvore geradora para o grafo e que o peso de tal árvore é menor ou igual que o peso de qualquer outra árvore geradora.

5. Comece seguindo o algoritmo de Kruskal ou de Dijkstra para obter uma árvore geradora de peso mínimo.

6. O item (a) simplesmente conta o número de inteiros ímpares na lista 1, 2, ..., $\binom{n}{2}$. Para o item (b), comece pintando uma folha de T, digamos de azul; em seguida, se alguns (mas não todos os) vértices de T já foram pintados, escolha um vértice v de T que ainda não foi pintado e é adjacente a um vértice u já pintado, pinte v de forma tal que u e v tenham cores distintas; prossiga até que não haja mais vértices de T a pintar. Para o item (c), mostre que um caminho tem peso ímpar se, e só se, suas extremidades tiverem cores distintas; em seguida, utilize a sugestão dada à segunda parte do problema 1. Por fim, para o item (d), use o resultado de (a) e (c), juntamente com o fato de que $x + y = n$.

Seção 5.4

1. Se G é um grafo com pelo menos seis vértices, prove que $\omega(G) \geq 3$ ou $\omega(\overline{G}) \geq 3$.

2. As pessoas $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ e J formaram os seguintes oito comitês:

$$A,B,C,D \quad B,D,F,G \quad A,H,J \quad G,H,J$$
$$A,C,D,E \quad C,F,G,H \quad H,I,J \quad E,I$$

Cada comitê deve se reunir um dia inteiro, de modo que quaisquer dois comitês com pelo menos um membro em comum devem se reunir em dias distintos. Calcule o menor número possível de dias necessários.

3. O propósito deste problema é fornecer uma outra prova do resultado do exemplo 5.42 quando G é um grafo com $2n$ vértices, $n > 1$, e pelo menos $n^2 + 1$ arestas. Para tanto, fixe dois vértices adjacentes u e v de G e faça os seguintes itens[2]:

   (a) Se $d_G(u) + d_G(v) \geq 2n + 3$, use o princípio da casa dos pombos para garantir que G tem um K_3 da forma uvw.

   (b) Se $d_G(u) + d_G(v) \leq 2n + 2$, encaixe uma hipótese de indução em $G - \{u, v\}$ (cf. problema 10, página 164) para concluir que tal grafo (e portanto G) contém um K_3.

5. Seja G um grafo com 10 vértices e 26 arestas. Mostre que G deve ter pelo menos cinco K_3's.

6. (Torneio das Cidades.) Em um campeonato de futebol, participam vinte equipes. Qual é o número mínimo de partidas que deve ter o torneio para que, dentre quaisquer três equipes, haja duas que joguem entre si?

7. (Estados Unidos.) Em uma certa sociedade, cada par de pessoas é classificado como *amigável* ou *hostil*. Membros de pares amigáveis são ditos *amigos* e membros de pares hostis são ditos *adversários*. Suponha que a sociedade tem n pessoas, q pares amigáveis e que pelo menos um par em qualquer conjunto de três pessoas seja hostil. Prove que existe pelo menos um membro da sociedade cujo conjunto de adversários contêm, ao todo, não mais do que $q\left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ pares amigáveis.

8. Em um conjunto de n pessoas, sabe-se que em qualquer grupo de três pessoas há duas que se conhecem e em qualquer grupo de quatro

[2] A prova delineada neste problema é devida ao matemático húngaro László Lovász.

pessoas há duas que não se conhecem. Calcule o maior valor possível de n.

9. Dados 21 pontos sobre um círculo, prove que existem pelo menos 100 arcos, cada um dos quais definido por dois desses 21 pontos, cujas medidas em graus são menores ou iguais a $120°$.

10. (Polônia.) Sejam dados n pontos sobre um círculo de raio 1. Mostre que há no máximo $\frac{n^2}{3}$ segmentos ligando pares desses pontos e tendo comprimentos maiores ou iguais a $\sqrt{2}$.

11. Seja G um grafo com n vértices, tal que $\omega(G) < k$, onde $k \geq 2$. Prove que G contém pelo menos $\lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor$ vértices com graus menores ou iguais a $\lfloor \frac{(k-2)n}{k-1} \rfloor$.

12. Um conjunto de 1001 pessoas é tal que cada subconjunto de 11 pessoas contém pelo menos dois indivíduos que se conhecem. Mostre que existem pelo menos 101 pessoas no conjunto, tais que cada uma delas conhece pelo menos 100 pessoas no conjunto.

13. Seja A um subconjunto de 101 elementos de $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$. Prove que existem $x_1, x_2, \ldots, x_{100} \in S$ tais que, para $1 \leq j \leq 100$, os conjuntos $A_j = \{x + x_j;\, x \in A\}$ sejam dois a dois disjuntos.

Referências Bibliográficas

[1] AIGNER, M. e ZIEGLER, G. (2010) *Proofs from THE BOOK.* Springer-Verlag.

[2] ANDREWS, G. (1994). *Number Theory.* Dover.

[3] AKOPYAN, A. V. e ZASLAVSKY A. A. (2007). *Geometry of Conics.* American Mathematical Society.

[4] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 1.* John Wiley & Sons.

[5] APOSTOL, T. (1967). *Calculus, Vol. 2.* John Wiley & Sons.

[6] APOSTOL, T. (1976). *Introduction to Analytic Number Theory.* Springer-Verlag.

[7] DE BARROS, A. A. e ANDRADE, P. F. DE A. (2009). *Introdução à Geometria Projetiva.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[8] BARBOSA, J. L. M. (2004). *Geometria Euclidiana Plana.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[9] BARBOSA, J. L. M. (1995). *Geometria Hiperbólica.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[10] CAMINHA, A. (2015). *Fundamentos de Cálculo*, Primeira edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

[11] CAMINHA, A. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar, Volume I: Números Reais*, Segunda edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

[12] CAMINHA, A. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar, Volume II: Geometria Euclidiana Plana*,

[13] CAMINHA, A. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar, Volume III: Introdução à Análise*, Segunda edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

[14] CAMINHA, A. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar, Volume V: Teoria dos Números*,

[15] CAMINHA, A. (2013). *Tópicos de Matemática Elementar, Volume VI: Polinômios*, Segunda edição. Sociedade Brasileira de Matemática.

[16] CARVALHO, P. C. P. (2002). *Introdução À Geometria Espacial.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[17] CARVALHO, P. C. P.; LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. (2006). *A Matemática do Ensino Médio, Volume 3.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[18] CHERMAN, A. (2004). *Sobre os Ombros de Gigantes.* Jorge Zahar.

[19] COHEN, L. W. e EHRLICH, G. (1963). *The structure of the real number system.* D. Van Nostrand.

[20] CONWAY, J. B. (1978). *Functions of One Complex Variable I.* Springer-Verlag.

[21] DE MORAIS FILHO, D. C. (2012). *Um Convite à Matemática.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[22] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. (1967). *Geometry Revisited.* The Mathematical Association of America.

[23] DIESTEL, R. (2000). *Graph Theory.* Springer-Verlag.

[24] DILWORTH, R. (1950). *A decomposition theorem for partially ordered sets*, Ann. Math. **51**, 161-166 .

[25] ERDÖS, P. e SZEKERES, G. (1935). *A combinatorial problem in geometry*, Comp. Math. **2**, 463-470.

[26] FEITOSA, S. B. (2006) *O teorema de Turán*, Sigma **3**, 2-4.

[27] DE FIGUEIREDO, D. G. (1996). *Análise I.* LTC.

[28] DE FIGUEIREDO, D. G. (2002). *Números Irracionais e Transcendentes.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[29] GARCIA, A. e LEQUAIN, Y. (2002). *Elementos de Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[30] GONÇALVES, A. (1999). *Introdução à Álgebra.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[31] HEATH, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* Dover.

[32] HILBERT, D. e COHN-VOSSEN, S. (1999). *Geometry and Imagination.* American Mathematical Society.

[33] HOFFMAN, K. e KUNZE, R. (1971). *Linear Algebra.* Prentice-Hall.

[34] HONSBERGER, R. (1985). *Mathematical Gems III.* The Mathematical Association of America.

[35] HONSBERGER, R. (1995). *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.* The Mathematical Association of America.

[36] LIMA, H. N. (2011). *Limites e Funções Aritméticas.* Preprint.

[37] IEZZI, G. e POMPEO, J. N. (1991). *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Vol. 9.* Atual Editora.

[38] JOHNSON, R. (2007). *Advanced Euclidean Geometry.* Dover.

[39] LANDAU, E. (2002). *Teoria Elementar dos Números.* Ciência Moderna.

[40] LIMA, E. L. (1997). *Medida e Forma em Geometria.* Sociedade Brasileira de Matemática.

[41] LIMA, E. L. (2004). *Curso de Análise, Vol.* 1. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[42] LIMA, E. L. (2009). *Curso de Análise, Vol.* 2. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[43] LOZANSKY, E. e ROUSSEAU, C. (1996). *Winning Solutions.* Springer-Verlag.

[44] MITRINOVIC, D. (1964). *Elementary Inequalities.* Noordhoff.

[45] MOREIRA, C. G. e KOHAYAKAWA, Y. (2001). *Tópicos em Combinatória Contemporânea.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[46] NUSSENZVEIG, H. M. (2002). *Curso de Física Básica, Vol. 1.* Edgard Blucher.

[47] ROBERTS, J. (1978). *Elementary number theory: a problem oriented approach.* MIT Press.

[48] RUDIN, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, Inc.

[49] SINGH, S. (1998). *O Último Teorema de Fermat.* Record.

[50] STEIN, E. e SHAKARCHI, R. (2003). *Fourier Analysis. An Introduction.* Princeton University Press.

[51] TENT, M. B. W. (2006). *Prince of Mathematics: Carl Friedrich Gauss.* A. K. Peters Ltd.

[52] TURÁN, P. (1941). *An extremal problem in graph theory.* Mat. Fiz. Lapok **41**, 435-452.

[53] VAINSENCHER, I. (1996). *Introdução às Curvas Algébricas Planas.* Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

[54] VAN LINT, J. H. e WILSON, R. M. (2001). *Combinatorics.* Cambridge University Press.

[55] WILF, H. (1994). *Generatingfunctionology.* Academic Press.

[56] YAGLOM, I. M. (1962). *Geometric Transformations I.* The Mathematical Association of America.

CAPÍTULO A

Glossário

APMO: Asian-Pacific Mathematical Olympiad.

Áustria-Polônia: Olimpíada de Matemática Austro-Polonesa.

BMO: Balkan Mathematical Olympiad.

Baltic Way: Baltic Way Mathematical Contest.

Crux: Crux Mathematicorum, periódico de problemas da Sociedade Canadense de Matemática.

IMO: International Mathematical Olympiad.

Israel-Hungria: Competição Binacional Israel-Hungria.

Miklós-Schweitzer: Miklós-Schweitzer Mathematics Competition (Hungria).

NMC: Nordic Mathematical Contest.

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática.

OBMU: Olimpíada Brasileira de Matemática para Universitários.

OCM: Olimpíada Cearense de Matemática.

OCS: Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

OIM: Olimpíada Ibero-americana de Matemática.

OIMU: Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária.

ORM: Olimpíada Rioplatense de Matemática.

Putnam: The William Lowell Mathematics Competition (Estados Unidos).

Torneio das Cidades: The Tournament of the Towns, olimpíada intermunicipal mundial de Matemática.

Índice Remissivo

(continuação dos títulos publicados)

- *Treze Viagens pelo Mundo da Matemática - C. Correia de Sa e J. Rocha (editores)*
- *Como Resolver Problemas Matemáticos - T. Tao*
- *Geometria em Sala de Aula - A. C. P. Hellmeister (Comitê Editorial da RPM)*
- *Números Primos, amigos que causam problemas - P. Ribenboim*
- *Manual de Redação Matemática - D.C de Morais Filho*

COLEÇÃO PROFMAT

- *Introdução à Álgebra Linear - A. Hefez e C.S. Fernandez*
- *Tópicos de Teoria dos Números - C. G. Moreira , F. E Brochero e N. C. Saldanha*
- *Polinômios e Equações Algébricas - A. Hefez e M.L. Villela*
- *Tópicos de Historia de Matemática - T. Roque e J. Bosco Pitombeira*
- *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática - V. Giraldo, P. Caetano e F. Mattos*
- *Temas e Problemas Elementares - E. L. Lima, P. C. Pinto Carvalho, E. Wagner e A. C. Morgado*
- *Números e Funções Reais - E. L. Lima*
- *Aritmética - Abramo Hefez*
- *Geometria - A. Caminha*
- *Avaliação Educacional - M. Rabelo*
- *Geometria Analítica - J. Delgado, K. Frensel e L. Crissaff*
- *Matemática Discreta - A. Morgado e P.C.P. Carvalho*
- *Matemática e Atualidade - Volume 1 - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin*
- *Fundamentos de Cálculo - A. C. Muniz Neto*
- *Matemática e Atualidade - Volume 2 - C. Rousseau e Y. Saint-Aubin*
- *Exercícios Resolvidos de Álgebra Linear - A. Hefez e C. de Souza Fernandez*

COLEÇÃO INICIAÇÃO CIENTÍFICA

- *Números Irracionais e Transcendentes - D. G. de Figueiredo*
- *Números Racionais e Irracionais - I. Niven*
- *Tópicos Especiais em Álgebra - J. F. S. Andrade*

COLEÇÃO TEXTOS UNIVERSITÁRIOS

- *Introdução à Computação Algébrica com o Maple - L. N. de Andrade*
- *Elementos de Aritmética - A. Hefez*
- *Métodos Matemáticos para a Engenharia - E. C. de Oliveira e M. Tygel*

(continuação dos títulos publicados)

- *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies - M. P. do Carmo*
- *Matemática Discreta - L. Lovász, J. Pelikán e K. Vesztergombi*
- *Álgebra Linear: Um segundo Curso - H. P. Bueno*
- *Introdução às Funções de uma Variável Complexa - C. S. Fernandez e N. C. Bernardes Jr.*
- *Elementos de Topologia Geral - E. L. Lima*
- *A Construção dos Números - J. Ferreira*
- *Introdução à Geometria Projetiva - A. Barros e P. Andrade*
- *Análise Vetorial Clássica - F. Acker*
- *Funções, Limites e Continuidade - P. Ribenboim*
- *Fundamentos de Análise Funcional - D. Pellegrino, E. Teixeira e G. Botelho*
- *Teoria dos Números Transcendentes - D. Marques*
- *Introdução à Geometria Hiperbólica - O modelo de Poincaré - P. Andrade*
- *Álgebra Linear: Teoria e Aplicações - T. P. de Araújo*
- *Introdução à Análise Matemática na Reta - C. I. Doering*
- *Topologia e Análise no Espaço Rn - R. Freire de Lima*
- *Equações Ordinárias e Aplicações - B. Scárdua*

COLEÇÃO MATEMÁTICA APLICADA

- *Introdução à Inferência Estatística - H. Bolfarine e M. Sandoval*
- *Discretização de Equações Diferenciais Parciais - J. Cuminato e M. Meneguette*
- *Fenômenos de Transferência – com Aplicações às Ciências Físicas e à Engenharia volume 1: Fundamentos - J. Pontes e N. Mangiavacchi*

COLEÇÃO OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 1ª a 8ª - E. Mega, R. Watanabe*
- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática, 9ª a 16ª - C. Moreira, E. Motta, E. Tengan, L. Amâncio, N. C. Saldanha e P. Rodrigues*
- *21 Aulas de Matemática Olímpica - C. Y. Shine*
- *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções - K. I. M. Oliveira e A. J. C. Fernández*
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Fundamental - E. Carneiro, O. Campos e M.Paiva*
- *Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981-2005 Nível Médio - E. Carneiro, O.*

(continuação dos títulos publicados)

Campos e M.Paiva

- *Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª - C. G. T. de A. Moreira, C. Y. Shine, E. L. R. Motta, E. Tengan e N. C. Saldanha*

COLEÇÃO FRONTEIRAS DA MATEMÁTICA

- *Fundamentos da Teoria Ergódica - M.Viana e K. Oliveira*
- *Tópicos de Geometria Diferencial - A. C. Muniz Neto*
- *Formas Diferenciais e Aplicações - M. Perdigão do Carmo*

COLEÇÃO MATEMÁTICA PARA O ENSINO

- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume I Números Naturais - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo*
- *Livro do Professor de Matemática na Educação Básica Volume II Números Inteiros - C. Ripoll, L. Rangel e V. Giraldo*